KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
20/12 2006 kl 14-19

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna på första delen svarar mot kursens fyra moduler. Är du godkänd på löpande examination av modul n får du tillgodoräkna dig 4 poäng på uppgift n (och ska alltså inte göra uppgift n).

Den andra delen består av fyra uppgifter som ger vardera ger maximalt 5 poäng vardera.

Den som är godkänd på inlämningsuppgiften LE3 och dessutom har sammanlagt minst 30 poäng på de tre lappskrivningarna erhåller en extra bonuspoäng.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Betyget på tentamen bestäms av den sammanlagda poängsumman från del 1 och 2, samt eventuell extra bonuspoäng, dvs totalt 37 poäng. Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg E och 3: 18 – 21 poäng
- För betyg D och 3: 22 – 24 poäng
- För betyg C och 4: 25 – 27 poäng
- För betyg B och 4: 28 – 30 poäng
- För betyg A och 5: 31 – 37 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del 1. Uppgifter om 4 poäng

(1) Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{2x-5}{x+2}.$$

Ange på vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande, och var den är positiv respektive negativ. Relevanta asymptoter ska också bestämmas.

(2) Beräkna de bestämda integralerna

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ (2 p) b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ (2 p)

(3) Bestäm andra ordningens Taylor-polynom till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 9$, och beräkna med hjälp av detta en approximation till $\sqrt{8.9}$.

(4) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - 7z = 1 \\ 5x - 7y + 37z = 29 \end{cases}$$

samt ge en geometrisk tolkning av systemet och dess lösning.

Del 2. Uppgifter om 5 poäng

(5) Låt $\mathbf{u}$ vara vektorn $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

a) Ange en enhetsvektor $\mathbf{v}$ som är parallell med xy-planet och ortogonal mot $\mathbf{u}$. (2 poäng)

b) Bestäm en tredje enhetsvektor $\mathbf{w}$ som är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$. (3 poäng)

(6) Beräkna integralen

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

då $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

Denna integral har en naturlig tolkning. Vilken?

(7) För vilka värden på det reella talet p konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^p} \ ?$$

(8) a) Formulera differentialkalkylens medelvärdessats (medelvärdessatsen för derivator) och illustrera dess innebörd med en lämplig figur. (2 p)

b) Är det sant att $\ln \frac{b}{a} < b - a$ för alla $1 < a < b$? Bevisa eller motbevisa! (3 p)