Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

LÖSNINGSFÖRSLAG 5B1142 & 5B1143, del B 31/5 -07

1.

$$f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$$

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + (x-4)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{2(x-1)+(x-4)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}}$$

Kritiska punkter ges av $f'(x)=0 \iff x=2$.

Då f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[1,5]$ antar f största och minsta värde, och det sker antingen i intervallets ändpunkter, i kritiska punkter eller i singulära punkter. I detta fall saknas singulära punkter i $(1,5)$, och $x=2$ är enda kritiska punkt.

Vi jämför

$$f(1) = (1-4)\sqrt{1-1} = 0$$

$$f(2) = (2-4)\sqrt{2-1} = -2$$

$$f(5) = (5-4)\sqrt{5-1} = 2$$

Svar: $f_{max} = f(5) = 2$, $f_{min} = f(2) = -2$

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

(2.) $I = \int_4^6 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$

Vi vill partialbråksuppdela integranden.

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ eller ~~x=~~ $x=1$

så $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} \overset{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x-(A+3B)}{(x-3)(x-1)}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} A+B=3 \\ A+3B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

Vi får

$$I = \int_4^6 \left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \Big[2\ln|x-3|+\ln|x-1|\Big]_4^6$$

$$= \Big[\ln(x-3)^2|x-1|\Big]_4^6 = \ln 9\cdot 5 - \ln 1\cdot 3$$

$$= \ln\frac{45}{3} = \ln 15$$

$$\boxed{\text{SVAR: } \ln 15}$$

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

3.

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x)}{1+x^2}$$ är separabel

så ekv. kan skrivas (med $y = f(x)$)

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \arctan x + C$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C + \arctan x} = C_1 e^{\arctan x}$$

$C_1 > 0$

Då $x \to \infty$ ska gälla att $y = f(x) \to 1$

Eftersom $\lim_{x\to\infty} e^{\arctan x} = e^{\lim_{x\to\infty} \arctan x} = e^{\pi/2} > 0$

väljer vi $y > 0$, dvs, $|y| = y$ och

$$y = C_1 e^{\arctan x}$$

När $x \to +\infty$ ska V.L. $\to 1$, medan H.L. $\to C_1 e^{\pi/2}$

$$\Rightarrow C_1 = e^{-\pi/2}$$

$$\boxed{\text{SVAR: } f(x) = e^{\arctan x - \pi/2}}$$

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

(4.) I skärningspunkten gäller att x, y och z-koordinaterna är lika, dvs

$$\begin{cases} 3+s = 4+2t \\ 1-2s = 6+3t \\ 3+3s = 1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-2t = 1 \\ 2s+3t = -5 \\ 3s-t = -2 \end{cases}$$

På matrisform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

dvs linjerna skär varandra i den punkt som svarar mot $s=t=-1$, dvs i punkten $(x,y,z) = (2,3,0)$.

Linjerna har riktningsvektorer $\bar{u} = (1\ -2\ 3)^T$ resp $\bar{v} = (+2\ 3\ +1)^T$

För mellanliggande vinkel α gäller

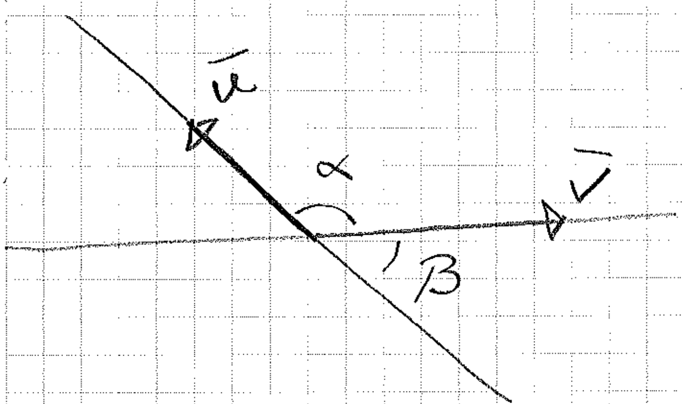
$$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2-6+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = -\frac{1}{14}$$

4 forts.

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

Riktningsvektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ bildar alltså trubbig vinkel α ($\cos\alpha < 0$).



Den spetsiga vinkeln mellan linjerna är då $\beta = \pi - \alpha$, och

$$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{14}$$

SVAR: Linjerna skär varandra i punkten $(2, 3, 0)$ under vinkel β s.a. $\cos\beta = \frac{1}{14}$ (dvs $\beta = \arccos\frac{1}{14}$)

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

(5.) Planens gemensamma skärningspunkter (x,y,z) avgörs av lösningar till

$$\begin{cases} ax - 3y + z = 2 \\ 2x + y + z = 6 \\ 6x - y + 3z = b \end{cases} \quad (1)$$

Om (1) ska kunna ha oändligt många lösningar måste koefficientdet. $= 0$

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underset{\text{utveckla längs 2:a kolumn}}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} a+6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{a=2}$$

Vi löser (1) för $a=2$.

$$\underset{a=2}{(1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 4 & 20 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & b+6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & b-14 \end{array}\right)$$

Om $b \neq 14$ saknas lösningar. $b=14$ ger

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

5 forts

Efternamn, förnamn | Personnummer | Program | Blad nr | Uppgift nr

$$\sim \begin{cases} 2x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 5/2 - t/2 \\ y = 1 \\ z = t, \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = 2 - t/2 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \sim \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

<u>SVAR:</u> <u>DE</u> TRE PLANEN SKÄR VARANDRA LÄNGS EN GEMENSAM LINJE OMM $a = 2$ OCH $b = 14$.

DÅ GES SKÄRNINGSLINJEN AV

$$\begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

Efternamn, förnamn | Personnummer | Program | Blad nr | Uppgift nr

6.

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f(x)$ är def. för alla $x \in \mathbb{R}$, och

$f'(x) > 0$, dvs f växande, alla $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f är inverterbar på hela $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \ln\left(\sqrt{1}\right) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0.$$

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}} = 1$$

SVAR: f är inverterbar på hela $\mathbb{R}$ och $\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$

Efternamn, förnamn | Personnummer | Program | Blad nr | Uppgift nr

7. Antag att f är en funktion med
a) $(n+1)$ kontinuerlig derivator på ett intervall $I = (c, d)$. Låt $a \in I$. Då gäller för varje $x \in I$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där ξ är någon punkt mellan a och x.

f kan alltså under förutsättningarna approximeras med ett n:te grads polynom, där feltermen ges av den sista termen $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

7 b) Låt $f(x) = \ln x$. Ta $a=1$, $f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(\xi) = \frac{2}{\xi^3}$

7b forts

Efternamn, förnamn | Personnummer | Program | Blad nr | Uppgift nr

Om vi Taylorutvecklar till 2:a ordningen kring a=1 kommer feltermen att ges av

$$R = \frac{f'''(\xi)}{3!}(11/10-1)^3 = \frac{2}{\xi^3 \cdot 3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \quad 1 \leq \xi \leq \frac{11}{10}$$

Man ser att $R > 0$ och

$$R < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 < 0.00034$$

En 2:a ordnings utveckling kan därför ge 3 korrekta decimaler. Vi prövar:

$$f\left(\frac{11}{10}\right) = f(1) + f'(1)(11/10-1) + \frac{f''(1)}{2!}(11/10-1)^2 + R$$

$$= 0 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + R = 0.1 - 0.005 + R =$$

$$= 0.995 + R$$

Alltså är

$$0.995 < f\left(\frac{11}{10}\right) < 0.995 + 0.00034$$

$$\boxed{\underline{\text{Svar:}} \quad f\left(\frac{11}{10}\right) \approx 0.995}$$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

8

a) Under en mycket kort delsträcka I_i av längd Δx_i kan hastigheten betraktas som approximativt konstant $v_i = v(x_i^*)$, $x_i^* \in I_i$.

Den tid det tar att avverka delsträckan I_i blir då $\Delta t_i \approx \dfrac{\Delta x_i}{v(x_i^*)}$.

Totala tiden ges då av

$$t = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \approx \sum \frac{\Delta x_i}{v(x_i^*)}$$

Den approximativa likheten blir bättre och bättre när indelningen i delintervall görs allt finare samtidigt som H.L., som är en Riemannsumma för $\dfrac{1}{v(x)}$, konvergerar mot $\displaystyle\int_0^{10} \frac{dx}{v(x)}$

Alltså $\displaystyle t = \int_0^{10} \frac{dx}{v(x)}$

KTH VETENSKAP OCH KONST

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

b) $t = \int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x(10-x)}} = \int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{10x - x^2}} =$

$= \int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{-(x-5)^2+25}} = \left\{ \begin{array}{l} u = x-5 \\ du = dx \\ u(0) = -5 \\ u(10) = 5 \end{array} \right\}$

$= \int_{-5}^{5} \frac{du}{\sqrt{25-u^2}} = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{u}{5})^2}}$

$= \left\{ \begin{array}{ll} s = \frac{u}{5} & du = 5\,ds \\ u = 5s & s(\pm 5) = \pm 1 \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$

$= \left[\arcsin s \right]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1)$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

<u>Svar:</u> $t = \pi$ [s]