Tentamen SF1622/5B1142
21/12 2007
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

---

(1) $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$, på $[0,2]$.

Eftersom f är kontinuerlig och intervallet slutet vet vi att f antar ett största och minsta värde på $[0,2]$.

Detta måste ske i någon av ändpunkterna, i kritiska punkter (där $f'=0$) eller i singulära punkter. Det senare är inte aktuellt eftersom f är deriverbar överallt.

$$f'(x) = (4x-3)e^x + (2x^2-3x)e^x =$$
$$= (2x^2+x-3)e^x.$$

$$f'(x) = 0 \underset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} 2x^2+x-3=0 \Longleftrightarrow x^2 + 1/2 - 3/2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = -1/4 \pm \sqrt{1/16 + \tfrac{24}{16}} = -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{5}{4} = -\tfrac{6}{4} \quad \checkmark \quad 1$$

- $x=1$ enda kritiska punkt i $[0,2]$

$f(0) = 0$, $f(1) = -e$, $f(2) = 2e^2$

SVAR: $f(1) = -e$ är minsta värde
$f(2) = 2e^2$ är det största värdet.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{X \to +\infty} \int_0^{X} \frac{dx}{4+x^2} =$

$\displaystyle = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{4} \int_0^{X} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{x}{2} & x = X \Rightarrow u = \frac{X}{2} \\ du = \frac{1}{2} dx & x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ 2du = dx, & \end{array} \right\}$

$\displaystyle = \lim_{X \to +\infty} \frac{2}{4} \int_0^{X/2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \lim_{X \to +\infty} \Big[\arctan u \Big]_0^{X/2}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \Big(\lim_{X \to +\infty} \arctan \underbrace{\frac{X}{2}}_{\to +\infty} - \underbrace{\arctan 0}_{0} \Big)$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ $\qquad$ Svar: $\frac{\pi}{4}$

3 Gemensamma punkter = lösningen till ekv. systemet

$$\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ 5x-y+2z=12 \\ 3x+3y-2z=4 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad 4 \quad 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & 5 & 49 \\ -5 & 1 & -2 & -12 \\ 18 & 0 & 4 & 40 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{4} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & 5 & 49 \\ -5 & 1 & -2 & -12 \\ \frac{9}{2} & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 2 \quad -5 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 9/2 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 9/2 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} -4 \quad -9/2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Planen har precis en punkt gemensam, $(2,0,1)$.

(4) • Låt $f(x) = 1 + x + e^x$

Då är $f'(x) = 1 + e^x > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ f strikt växande.

• Dessutom är $f(-10) = -9 + 1/e^{10} < 0$

$f(10) = 11 + e^{10} > 0$

& f är en kontinuelig funktion

$\Rightarrow$ Enligt satsen om mellanliggande värde finns en punkt $c \in (-10, 10)$ s.a.

$f(c) = 0$.

Eftersom f är strikt växande finns också högst ett nollställe.

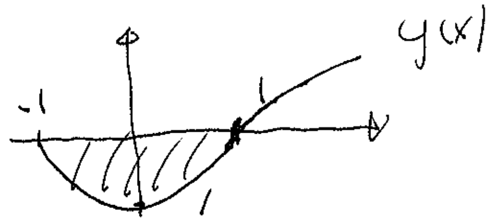
<u>Slutsats:</u> $f(x) = 0$ har exakt <u>en</u> lösning

5) $y=(x-1)\sqrt{x+1}$ skär x-axeln där

$(x-1)\sqrt{x+1}=0 \iff x=1$ eller $x=-1$

På intervallet $(-1,1)$ är $y(x)<0$ tg

t.ex är $y(0)=-1$



$$A=\int_{-1}^{1}\left|(x-1)\sqrt{x+1}\right|dx=\int_{-1}^{1}(1-x)\sqrt{x+1}\,dx$$

$$=\left\{\begin{matrix} t=x+1 \ , & dt=dx \\ \iff & t(-1)=0 \\ -x=1-t & t(1)=2 \end{matrix}\right\}=\int_0^2(2-t)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^2 2t^{1/2}-t^{3/2}\,dt=\left[\frac{2\cdot 2}{3}t^{3/2}-\frac{2t}{5}^{5/2}\right]_0^2$$

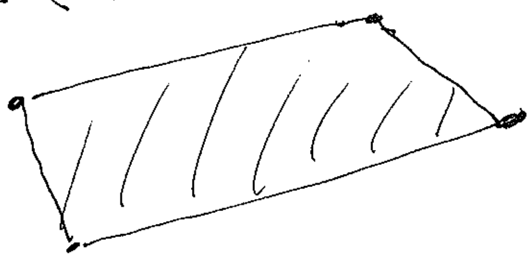
$$=\frac{4}{3}2^{3/2}-\frac{2}{5}2^{5/2}=2^{7/2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{2}{15}\right)=\underline{\underline{\frac{16}{15}\sqrt{2}}}$$

__SVAR:__ $\frac{16}{15}\sqrt{2}$ a.e

(6) $A = (1,0,1)$ $\quad B = (2,1,1)$

$C = (-1,1,1)$



$D = (-2,0,1)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{DC} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$$

$\Rightarrow$ ABCD parallellogram

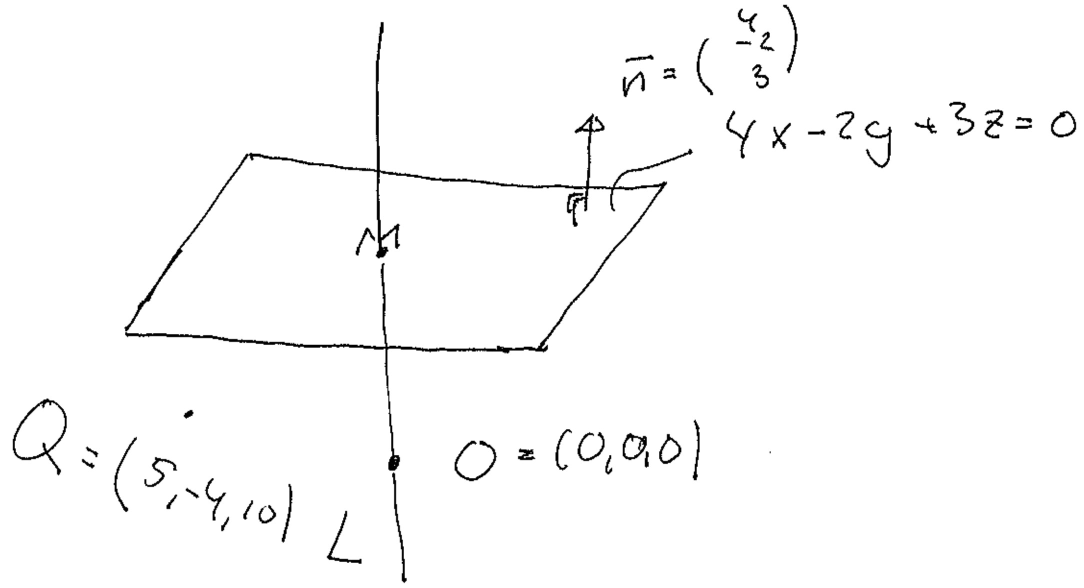
$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Area} = \left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

Svar: 3 a.e.

(7)



$L \perp$ givet plan $\Leftrightarrow L \,//\,$ planets normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är riktningsvektor till L $\Rightarrow$

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix}$$

$D(t) = [\text{avståndet } Q \text{ till } (4t, -2t, 3t) \text{ på } L]^2$

$= (4t-5)^2 + (-2t+4)^2 + (3t-10)^2 =$

$= 16t^2 - 40t + 25 + 4t^2 - 16t + 16 + 9t^2 - 60t + 100$

$= 29t^2 - 116t + 141$

$D(t)$ är parabel med positiv kvadrat term $\cup$

, $\Rightarrow$ minsta värde där $D'(t) = 0$.

$D'(t) = 58t - 116$, så minimum för $t = 2$

Eftersom $d(t) =$ "avstånd från Q till $(4t, -2t, 3t)$ på L" $= \sqrt{D(t)}$, minimeras även $d(t)$ för $t=2$

$t=2$ ger punkten $P = (8, -4, 6)$ på L

<u>SVAR:</u> $(8, -4, 6)$

(8) • Eftersom $1+e^x > 0$ alla x

är $\frac{xe^x}{1+e^x}$ kontinuelig alla x

$\Rightarrow$ inga vertikala asymptoter.

• När $x \to -\infty$ gäller att

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{1+e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}+1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\overbrace{-t/e^t}^{\to 0}}{\underbrace{1+\underbrace{e^{-t}}_{\to 0}}_{\to 1}} = \frac{0}{1} = 0$$

Dvs $y=0$ är asymptot när $x\to-\infty$

• När $x \to +\infty$ gäller att

$$\frac{xe^x}{1+e^x} \approx \frac{xe^x}{e^x} \simeq x$$ så man kan

förmoda att $y=x$ är sned asymptot.

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{xe^x}{1+e^x} - x \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{xe^x - x - xe^x}{1+e^x} \right|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x}{1+e^x} \right| = 0$$

$\Rightarrow$ $y=x$ är sned asymptot då $x\to+\infty$.

SVAR: $y=0$ då $x\to-\infty$

$y=x$ då $x\to+\infty$

(9) $F(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt \Rightarrow F(0) = 0$

$F'(x) = \sin x^2$ $\quad F'(0) = 0$

$F''(x) = 2x \cos x^2$ $\quad F''(0) = 0$

$F'''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$ $\quad F'''(0) = 2$

Maclaurinutveckling ger att

Begränsad funk av x i omgivn. till $x=0$

$$F(x) = \frac{2}{3!} x^3 + x^4 B(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + x^4 B(x)}{x^n} = \begin{cases} 0 & n < 3 \\ \frac{1}{3} & n = 3 \\ +\infty & n > 4 \end{cases}$$

Svar: $n = 3$

(10) Enligt antagande är $F_r = -kv(t)$ där $k>0$ är en konstant (F_r motriktad mot hastigheten). Vidare är $a(t) = v'(t)$. Vi får

$$mv'(t) = mg - kv(t) \iff$$

$$v' = g - \frac{k}{m}v \iff v' + \frac{k}{m}v = g.$$

(Sätt $\mu = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{k/m\, t}$) $\iff$

$$\underbrace{e^{\frac{k}{m}t}v' + \frac{k}{m}e^{\frac{k}{m}t}v} = ge^{\frac{k}{m}t}$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right) = ge^{\frac{k}{m}t} \iff$$

$$\iff ve^{\frac{k}{m}t} = \int ge^{\frac{k}{m}t}dt$$

$$\iff \underline{v} = e^{-\frac{k}{m}t}\left(\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C_1\right) = \underline{\frac{mg}{k} + C_1e^{-\frac{k}{m}t}}$$

släpps från vila $\iff v(0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = v(0) = \frac{mg}{k} + C_1 \iff C_1 = -\frac{mg}{k}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}}\quad v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$