Tentamen 11/4 2008 SF1622/5B1142

Svar & lösningsförslag

(1.) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{x-\pi} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Av typ } "\frac{0}{0}": \\ \text{l'Hospitals regel} \end{array} \right\} =$

$= \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos 2x}{1} = 2\cos 2\pi = \underline{\underline{2}}$

Alt: $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\sin x \cos x}{x-\pi} =$

$= 2\left(\lim_{x\to\pi}\cos x\right)\left(\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}\right) = 2(-1)(-1)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} =$

$= 2 \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}}_{=1,\ \text{std. gr.vä}} = \underline{\underline{2}}$

$\boxed{\text{Svar: } 2}$

(2.) a) $\int_{1/e}^{e} \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Partiell Integrering} & \\ U = \ln x & V = x \\ dU = \frac{1}{x}dx & dV = dx \end{array} \right\} =$

$= \left[x\ln x\right]_{1/e}^{e} - \int_{1/e}^{e} \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \left[x\ln x\right]_{1/e}^{e} - \left[x\right]_{1/e}^{e} =$

$= e\ln e - 1/e \ln 1/e - e + 1/e = e + 1/e - e + 1/e = \underline{\underline{\frac{2}{e}}}$

b) $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x}dx = \left\{ \begin{array}{l|l} \text{Variabelsubstitution} & \\ u = \ln x & u(1/e) = -1 \\ du = \frac{1}{x}dx & u(e) = 1 \end{array} \right\} =$

$= \int_{-1}^{1} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$

$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Svar:} & \text{a) } 2/e \\ & \text{b) } 0 \end{array}}$

3. $y'' + 4y' + 13y = 100e^{2x}$

Vi bestämmer först allmän homogen lösning y_h

Kar. ekv: $r^2+4r+13=0 \Rightarrow r=-2\pm\sqrt{(-2)^2-13}=-2\pm 3i$

$$\Rightarrow y_h(x)=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

Vi ansätter nu en partikulär lösning

$$y_p(x)=ce^{2x}, \Rightarrow y_p'=2ce^{2x}, \quad y_p''=4ce^{2x}$$

Insatt i given ekv. fås

$$4ce^{2x}+4\cdot 2ce^{2x}+13ce^{2x}=100e^{2x}$$

$$25c\cancel{e^{2x}}=100\cancel{e^{2x}} \Rightarrow c=4$$

så $y_p(x)=4e^{2x}$

$$\boxed{\text{Svar: } y_g(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+4e^{2x}}$$

(4.) Sätt $f(x)=4x^3-6x^2+1$. Då är $f'(x)=12x^2-12x$.

$f'(x)=0 \iff 12x(x-1)=0 \iff x=0$ och $x=1$

Teckentabell f':

x		0		1	
$12x$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+\ +$
f'	$+\ +$	0	$-$	0	$+\ +$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Alltså är

$f(0)=1$ ett lokalt maxvärde

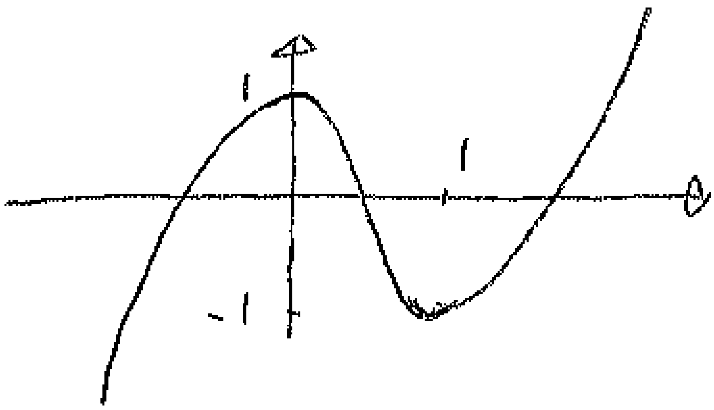
$f(1)=-1$ ett lokalt minvärde

Vidare gäller att

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Vi kan nu skissera grafen:



(i) f strikt växande på $(-\infty,0)$ ty $f'>0$

$\Rightarrow$ högst ett nollställe i $(-\infty,0)$

(ii) $\left.\begin{array}{l} f(-2)=4(-8)-6\cdot 4+1<0 \\ f(0)=1>0 \\ f \text{ kontinuerlig} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{MELLANLIGGANDE VÄRDE}]{\text{SATSEN OM}}$ minst ett nollställe $(-2,0)$

(i) $\wedge$ (ii) $\Rightarrow$ Exakt ett nollställe i $(-\infty,0)$.

På motsv. sätt visas att $f(x)$ har exakt ett nollställe i $(0,1)$ och exakt ett i $(1,\infty)$

$\boxed{\text{Svar: 3 lösningar}}$

5. a) $$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{N-1}}-\cancel{\frac{1}{N}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{N+1} = \underline{\underline{\frac{N}{N+1}}}$$

b) Eftersom $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) =$

$= \lim_{N\to\infty} 1-\underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\to 0} = 1$ är serien

konvergent per definition (med summa $=1$)

$$\boxed{\underline{\text{Svar:}}\quad a)\ \frac{N}{N+1}\qquad b)\ \text{Konvergent}}$$

---

6. $$\begin{cases} 5x + 2z - w = 9 \\ 2x + y = 2 \\ 2x + z - w = 4 \\ 4x + y + 2w = 4 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x + w = 1 \\ y - 2w = 0 \\ z - 3w = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}}\quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 + 3t \\ w = t \end{cases}}$$

7.

$$y = e^{-x^2/2} \Rightarrow \underline{y'} = e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \underline{-x\, e^{-x^2/2}}$$

$$\Rightarrow \underline{y''} = -e^{-x^2/2} - x e^{-x^2/2}(-x) = \underline{e^{-x^2/2}(x^2-1)}$$

Eftersom $e^{-x^2/2} > 0 \ \forall x$ gäller att

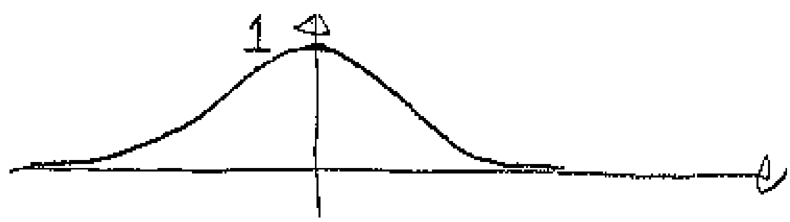
- $y' > 0$ omm $x < 0 \Rightarrow y$ strikt växande för $x<0$
- $y' < 0$ omm $x > 0 \Rightarrow y$ strikt avtagande för $x>0$
- $x=0$ är enda kritiska punkt, som är lok. max. och $y(0) = e^{-0} = 1$

Dessutom är

- $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2/2} = 0$, så $y=0$ är horisontell asymptot när $x \to \pm\infty$ ($\Rightarrow$ inga andra sneda asymptoter)
- $y = e^{-x^2/2}$ är def för alla $x \Rightarrow$ inga vertikala asymptoter

Vi noterar också $y(-x) = y(x)$, dvs funktionen är $\underline{\text{jämn}}$

Detta ger följande kurvskiss



Lutningen i x ges av $y'(x) = -xe^{-x^2/2}$.
Eftersom y' är kontinuelig och deriverbar $\forall x$ antas dess lokala extremvärden där $\frac{d}{dx}(y') = y'' = e^{-x^2/2}(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ och $y'(-1) = e^{-1/2}$ och $y'(1) = -e^{-1/2}$

Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} y' = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{e^{x^2/2}} = 0$ är dessa lokala extremvärden även $\underline{\text{globala}}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{SVAR:}} \cdot (0,1) \text{ är lok. max för } y(x) \text{ inga andra extrempkt.} \\ \cdot\ y=0 \text{ asymptot i } \pm\infty \\ \cdot \text{ Lutningen störst i } x=\pm 1\end{array}}$

8. $S_1: \quad 3x+y+2z=6$ har en normalvektor $\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

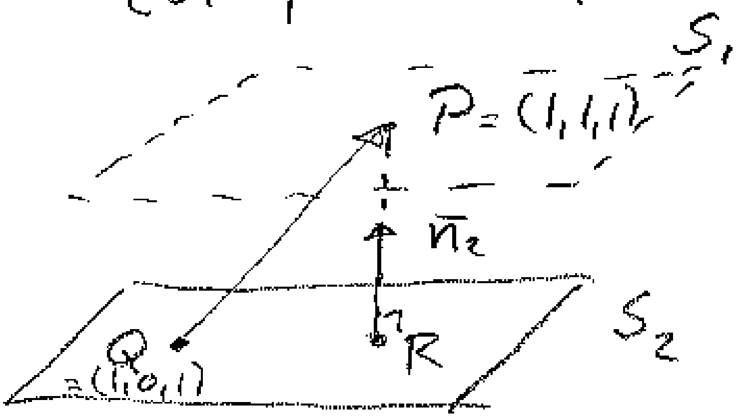
$S_2: \quad 6x+2y+4z=10$ — " — $\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

eftersom $\bar{n}_1 // \bar{n}_2$ är $S_1 // S_2$.

Planen är åtskilda ty $\underline{P}(1,1,1) \in S_1$ men $P \notin S_2$.

Avståndet mellan två parallella plan är lika med kortaste avståndet från någon godtycklig punkt i det ena planet till det andra planet.

Vi beräknar avståndet från $P=(1,1,1)$ i S_1 till planet S_2.



Tag en punkt i S_2, t.ex $Q=(1,0,1)$, och låt R vara den punkt i S_2 som är sådan att $\overrightarrow{RP} \perp S_2$

Då gäller att sökt avstånd $= |\overrightarrow{RP}|$ och

$$\overrightarrow{RP} = \text{proj}_{\bar{n}_2} \overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_2|^2} \bar{n}_2$$

$$\Leftrightarrow \text{Avstånd } S_1 - S_2 = |\overrightarrow{RP}| = \left| \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_2|^2} \bar{n}_2 \right| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_2|^{\cancel{2}}} \cancel{|\bar{n}_2|}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_2|}.$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2$$

och $|\bar{n}_2| = \sqrt{6^2+2^2+4^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

Sökt avstånd $= \frac{2}{2\sqrt{14}} = \sqrt{14}/14$

$\boxed{\text{Svar: } \sqrt{14}/14 \text{ l.e.}}$

Maclaurin utv. till 4:e ordning:

(9.) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$

där c är något tal mellan 0 och x

Om $f(x) = \sin x$ fås speciellt (känd utv.)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(c)}{5!}x^5$$

eftersom $\frac{d^5}{dx^5}(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ c mellan 0 och x.

$x = 1$ ger

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{\cos c}{5!}, \qquad 0 < c < 1$$

Eftersom $0 < \cos c < 1$ för $0 < c < 1$

är feltermen $\frac{\cos c}{5!} > 0$.

Alltså

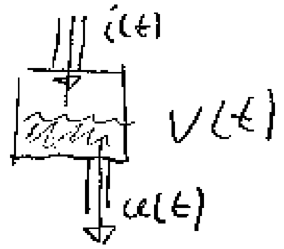
$$\underbrace{1 - \frac{1}{3!}}_{5/6} < \underline{\sin 1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{\cos c}{5!} \overset{\cos c < 1}{<} \underbrace{1 - \frac{1}{3!}}_{5/6} + \frac{1}{5!}$$

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

dvs $\quad 5/6 < \sin 1 < \frac{5}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$

$$\boxed{\underline{\text{Svar:}} \quad \sin 1 \in \left(\frac{100}{120}, \frac{101}{120}\right)}$$

(10.) $i(t)=\frac{1}{4t^2+1}$, $u(t)=\frac{1}{(2t+1)^2}=\frac{1}{4t^2+4t+1}$



$i(t) > u(t) \quad \forall \ t>0$

$\Rightarrow$ nettoinflödeshastigheten

$n(t)=i(t)-u(t) > 0 \quad \forall t>0$

dvs $V(t)$ är växande för $t>0$ $\left(V'(t)=n(t) \right)$

Under ett kort tidsintervall dt är nettoinflödet

$$dV = n(t)\,dt,$$ och följaktligen är

$$V(t) = \int_0^t n(s)\,ds = \int_0^t \big(i(s)-u(s)\big)\,ds$$

(Nedre gräns $=0$ ges av att $V(0)=0$)

$$\underline{V(t)} = \int_0^t \frac{1}{4s^2+1} - \frac{1}{(2s+1)^2}\,ds =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\arctan 2s + \frac{1}{2s+1}\right)\right]_0^t =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\arctan 2t + \frac{1}{2t+1} - 1\right)}}$$

Svar:

$V(t) =$
$= \frac{1}{2}\left(\arctan 2t + \frac{1}{2t+1} - 1\right)$

Tanken blir aldrig full

Vi har redan sett $V'(t)=u(t)-i(t)>0$ så $V(t)$ är strikt växande.

Vidare är $\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\left(\underbrace{\arctan 2t}_{\to \pi/2} + \underbrace{\frac{1}{2t+1}}_{\to 0} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{\pi-2}{4} < 1$ så tanken blir aldrig full!