TENTAMEN 13/1-11 SF1622
SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

(1.) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{e^x}, \quad -\infty < x < \infty.$

- f är def. $\forall x \in \mathbb{R}$ och $f(x) > 0, \ \forall x.$

- $$f'(x) = \frac{2xe^x - e^x(1+x^2)}{e^{2x}} = -\frac{(x^2-2x+1)e^x}{e^{2x}}$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{e^x} \Longrightarrow$$

$f'(x) < 0, \ x \neq 1$ och $f'(1) = 0$

$\Rightarrow$
- f är avtagande på hela $\mathbb{R}$
- f saknar extrempunkter
- f har en kritisk punkt i $x = 1$, som är en terasspunkt

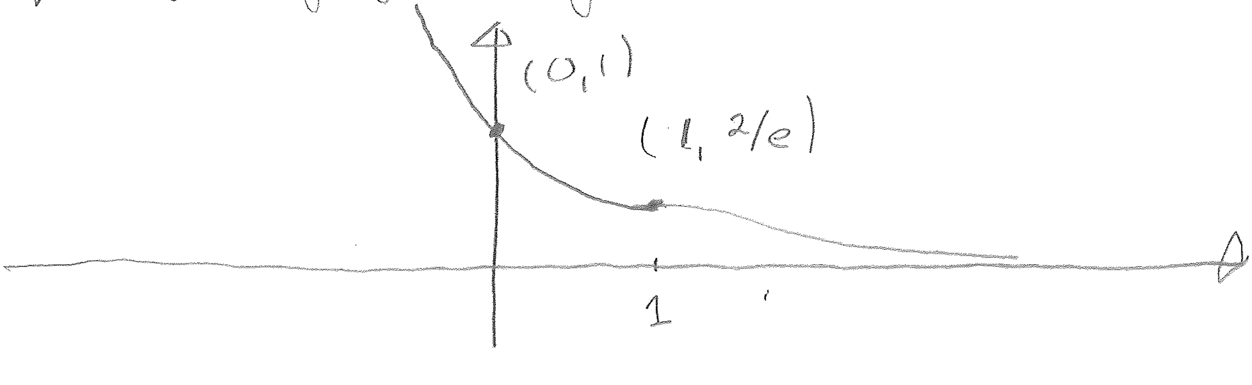
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{e^x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Standard} \\ \text{gränsvärde} \end{array} \right\} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{y=0 \text{ asymptot då } x \to +\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2}{e^x} = \{ x = -t \} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+(-t)^2}{e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^t(1+t^2) = \underline{+\infty}$$

Vi får följande graf:



② a)

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = x^2+4x+5 & u(0)=5 \\ \frac{du}{dx} = 2(x+2) & u(1)=10 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\Big[\ln u\Big]_5^{10} =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{5}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

<u>SVAR</u>: $\frac{1}{2}\ln 2$

b)

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = \int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

③ $\bar{u} = 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

a) $\bar{v} \parallel xy\text{-planet} \Rightarrow \bar{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$

$\bar{v} \perp \bar{u} \Leftrightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \Leftrightarrow$

$1/\sqrt{3}\,(a+b) = 0 \Leftrightarrow b = -a$

så $\bar{v} = \begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix}$

$\|\bar{v}\| = 1 \Rightarrow a = \pm 1/\sqrt{2}$,

vi väljer t.ex $\bar{v} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

En vektor $\bar{w}$ sådan att

b) $\bar{w} \perp \bar{u}$, $\bar{w} = \perp \bar{v}$ fås som

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}+1\\+1\\-2\end{pmatrix}$$

Vi ser att $\|\bar{w}\| = 1$

(följer av att $\|\bar{w}\| = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\sin\alpha$
$= \left\{\begin{matrix}\alpha = \pi/2\\ \sin\pi/2 = 1\end{matrix}\right\} = 1\cdot1\cdot1 = 1$)

Svar: a) $\bar{v} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\left(\text{eller } 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

b) $\bar{w} = 1/\sqrt{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\left(\text{eller } 1/\sqrt{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$

4.

$$f(x) = (1+x)^{3/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2} \qquad f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-1/2} \qquad f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8}(1+x)^{-3/2}$$

$$\underline{M_2}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$= \underline{1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2}$$

Vidare gäller att

$$f(x) = M_2(x) + R_3(x) \quad \text{där}$$

$$R_3(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 =$$

$$= -\frac{3}{8}\frac{1}{(1+c)^{3/2}}\cdot\frac{1}{3!}x^3$$ för något c mellan 0 och x.

Om $0 < x < 0.1$ gäller att $0 < c < x < 0.1$

och $$|R_3(x)| = \frac{3}{8}\frac{1}{3!}\frac{1}{(1+c)^{3/2}}x^3$$

$$< \frac{1}{16}\cdot 1\cdot(0.1)^3 < \frac{1}{10}\cdot 10^{-3} = 10^{-4}$$

V.S.B.

(5.) $g'' - g' - 6x = 12x$

Homogen lösning bestämmas från karakteristiska ekv:

$r^2 - r - 6 = 0 \iff (r-3)(r+2) = 0$

$\iff r = 3$ eller $r = -2$.

så $g_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

En partikulär lösning bestämmas genom ansats:

$g_p(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow g_p'(x) = \alpha, \quad g_p''(x) = 0$

som sätts in i given ekvation:

$-\alpha - 6(\alpha x + \beta) = 12x \iff$

$-6\alpha x - (\alpha + 6\beta) = 12x \iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1/3 \end{cases}$

så $g_p(x) = -2x + 1/3$.

Allmän lösning till given ekvation fås som

$g(x) = g_h(x) + g_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - 2x + 1/3$

Vi ser att om lösningen ska vara asymptotisk till en rät linje då $x \to \infty$ måste denna asymptot vara $\underline{y = -2x + 1/3}$

och lösningarna måste vara sådana att $A = 0$

dvs $g(x) = Be^{-2x} - 2x + 1/3$.

(6.) $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x+2y+3z+4w=5 \\ 3x+4y+5z+6w=7 \end{cases}$ skrivs på

matrisform och Gausselimineras:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{c} -1 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x \qquad -z-2w=-3 \\ y+2z+3w=4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x=s+2t-3 \\ y=-2s-3t+4 \\ z=s \\ w=t \end{cases} = \underline{\text{SVAR}}$$

(7)

Inför beteckningar enligt figur. Halvcirkelbågen på toppen får då längd $c = \pi r$.

Om omkretsen är O gäller att

$$O = 2r + 2l + \pi r = 2l + (2+\pi) r$$

$$\Leftrightarrow 2l = O - (2+\pi) r$$

Totala arean $A = A_{rektangel} + A_{halvcirkelskiva}$

$$= 2rl + \frac{1}{2}\pi r^2 = (O - (2+\pi) r) r + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= Or + \left(\frac{\pi}{2} - 2 - \pi\right) r^2 = Or - \left(\frac{4+\pi}{2}\right) r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = O - (4+\pi) r$$

dvs $A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{O}{4+\pi}$

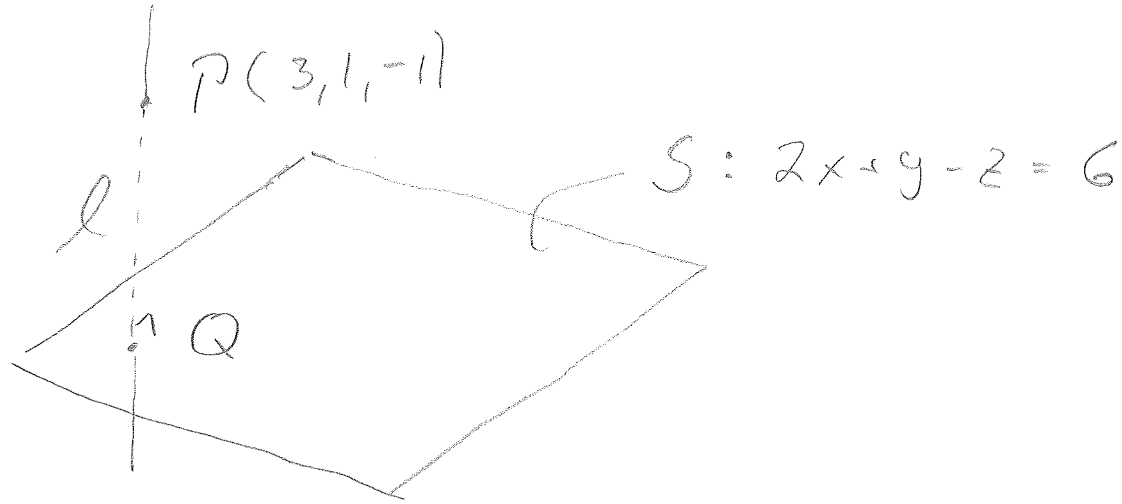
Eftersom $A = A(r)$ är en 2:a grads funk med negativ koeff. framför r^2 är det klart att $A(r)$ har maximum då $A'(r) = 0$

Om $r = \frac{O}{4+\pi}$ fås $l = \frac{1}{2}\left(O - (2+\pi)\frac{O}{4+\pi}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{O(4+\pi) - (2+\pi) O}{(4+\pi)} = \frac{1}{2}\,\frac{2O}{4+\pi} = \frac{O}{4+\pi} = r$$

SVAR: Maximal area fås om proportionerna väljs så att $r = l$, beteckningar enligt figur (dvs basen som står mot halvcirkeln väljs dubbelt så lång som höjden i rektangeln)

(8.)



Låt Q vara den punkt i planet S som ligger närmast P. Då är $\overrightarrow{QP}$ en normal till S.

Linjen l genom Q och P kan skrivas med planets normalvektor $\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som riktningsvektor

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi söker det t värde som ger skärning med S (dvs punkten Q) genom att sätta in koordinaterna för en punkt på l i planets ekvation

$$2(3+2t) + (1+t) - (-1-t) = 6$$

$$\Leftrightarrow 6t + 8 = 6 \Leftrightarrow t = -1/3$$

dvs Q har koordinater

$$(x,y,z) = (3,1,-1) - \tfrac{1}{3}(2,1,-1) = \left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

och $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Avståndet (Q, Planet) $= \| \overrightarrow{QP} \| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{6}/3$

<u>SVAR:</u> Avstånd $\sqrt{6}/3$ l.e.
Närmst punkt $(7/3, 2/3, -2/3)$

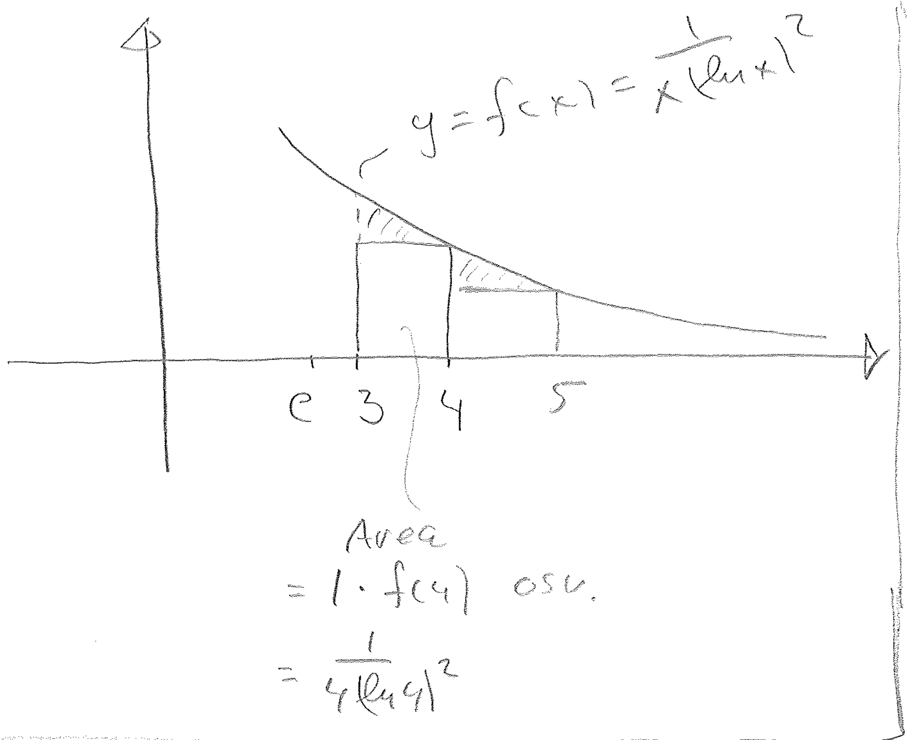
(9.)

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} > \frac{1}{4(\ln 4)^2} = \frac{1}{4(2\ln 2)^2}$$

$$= \frac{1}{4\cdot 4\cdot(\ln 2)^2} > \{\ln 2 < 1\} > \frac{1}{16}$$

För att visa $\Sigma < 1$ gör vi en integraluppskattning.

Eftersom $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, är en positi och avtagande funktion för $x > 1$ får vi (se figur)

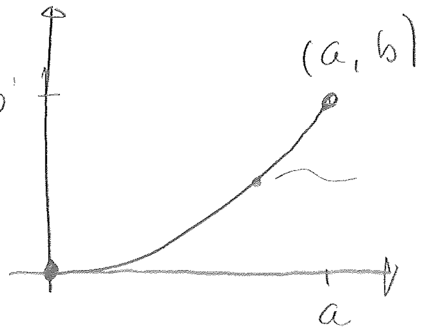


$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} < \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx < \int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right\}$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\infty} = 1$$

V.S.V.

10.



$y = f(x)$

$f'(x) = \sqrt{e^{2x}-1}$

Längden $l = 1$ men ges också av

$$l = \int_0^a \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1+e^{2x}-1}\,dx$$

$$= \int_0^a e^x\,dx = e^a - 1$$

Alltså är $e^a - 1 = 1$ dvs $a = \ln 2$

är x-koordinat för höger ändpunkt.

y-koordinaten b fås genom integration

$$\int_0^a f'(x)\,dx = f(a) - f(0) \quad \left[\begin{matrix}\text{enligt}\\ \text{huvudsatsen}\end{matrix}\right]$$

dvs $b = f(\ln 2) = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1}\,dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{e^{2x}-1} \Rightarrow & x = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) & u(0) = 0 \\ u^2 = e^{2x}-1 \Rightarrow & \frac{dx}{du} = \frac{u}{u^2+1} & u(\ln 2) = \sqrt{3} \\ e^{2x} = u^2+1 \Rightarrow & & \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} u\,\frac{u}{u^2+1}\,du = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+1}\,du = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du$$

$$= \Big[u - \arctan u\Big]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3} = \sqrt{3} - \pi/3 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$$

SVAR: $\left(\ln 2, \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)$