Tentamen SF1622 Envariabelanalys och linjär algebra 11 februari 2012

Svar och stolpar till vissa lösningar

1. SVAR: Minsta värde är $f(0) = 0$, största värde saknas.

   Derivatan har två nollställen i intervallet, i *x* = 0 och *x*= 1 . Värdet i dessa två punkter är $f(0) = 0$ och $f(1) = 1/e^2$. Funktionen är positiv för $x \neq 0$ varför $f(0) = 0$ är minsta värde. När *x* går mot -2 från höger kommer funktionsvärdet godtyckligt nära f(-2) som är större än alla värde på det angivna öppna intervallet, men värdet i f(-2) antas aldrig. Detta inses genom att skissera grafen på det angivna intervallet m h a derivatans teckensschema och beräkning av värdet i de kritiska punkterna samt gränsvärdet när *x* går mot – 2 från höger.

2. Svar: $\dfrac{5-6\ln 2}{96}$

3. Svar: Planen har en punkt gemensam, den har koordinaterna (2,0,1).

   Eventuella punkter som är gemensamma för de tre planen är precis de punkter som uppfyller samtliga tre ekvationer, dvs de utgör lösningen till det linjära ekvationssystem som ges av de tre givna ekvationerna. Gausselimination används lämpligen för att lösa ekvationssystemet.

4. Svar: 1/4 a.e

   Rita figur! Om sidan längs positiva x-axeln har längd *b,* ger förutsättningarna och Pytagoras Sats att den andra kateten har längden $\sqrt{1-b^2}$. Area *A* (*b*)som funktion av b ges alltså av $A(b) = \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2}$, där $0 \leq b \leq 1$. Derivering ger en inre kritisk punkt. Ett resonemang om varför denna punkt ger största värde krävs.

5. Se läroboken

6. Svar: $(x) = -e^{-2x} + 2\,e^{-x}$

7. a) Se läroboken

   b) Svar: $\ln\frac{11}{10} \approx 0.095$

   Approximation fås genom andra ordningens MacLaurinutveckling av $\ln(1+x)$ och genom en uppskattning av tillhörande felterm (observera att denna är positiv).

8. Svar: $2\sqrt{14}$ l .e.

Lösningen av likande uppgifter finns i läroboken.

9. Svar: Volymen vid tid t ges av $V(t) = \frac{1}{2}(\arctan 2t + \frac{1}{2t+1} - 1)$. Tanken kommer aldrig att bli full.

Differensen $v(t) = i(t) - u(t)$ ger nettoinflödet i tanken, observera att $v(t)$ är positiv för positiva t .

Volymen $V(t)$ vid tiden t fås genom integration från 0 till t . Eftersom $V'(t) = v(t)$ är positiv är funktionen växande. Gränsvärdet av $V(t)$ då t går mot oändligheten är mindre än 1.

10. Svar: För $p = 2$ är gränsvärdet = 1/3, och för $p = -1$ är gränsvärdet = 3. För övriga p saknas nollskilt ändligt gränsvärde.

MacLaurinutveckla termerna i täljare och nämnare (t o m grad 3), förenkla och analyser vad som händer för olika värden på p.