

KTH Matematik
JA & Hans Thunberg

**Tentamen i kurs 5B1143 Matematik 1, del B, för CL
den 5 februari 2007 klo 8 – 13.**

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna på första delen svarar mot moment fyra till sju i del B av kursen. Är Du godkänd på lappskrivning nummer $n+3$ får Du tillgodoräkna Dig 4 poäng på uppgift nummer n nedan, $1 \leq n \leq 4$, (och skall alltså inte göra uppgift n).

Den andra delen består av fyra uppgifter som ger vardera ger maximalt 5 poäng vardera.

Den som är godkänd på alla fyra lappskrivningarna med sammanlagt minst 40 poäng erhåller en extra bonuspoäng.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Betyget på tentamen bestäms av den sammanlagda poängsumman från del 1 och 2, samt eventuell extra bonuspoäng, dvs totalt 37 poäng. Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg 5: minst 30 poäng
- För betyg 4: 24 - 29 poäng
- För betyg 3: 18 - 23 poäng

Den som får åtminstone 16 poäng kan få komplettera tentamen vid ett senare tillfälle. Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del 1. Uppgifter om 4 poäng

- (1) Para ihop följande integrander och primitiva funktioner — OBS! några blir över. Visa för varje par Du finner *precis* hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringsymbol.

$\frac{x^4}{4!}$	$4! \left(-\frac{1}{x}\right)^5$	$2 \ln(x^4 + 1)$	$6 \sinh x$
$x^2 \ln x$	$2 \arctan(x^2)$	$\frac{24}{x^5}$	$\ln(x^2) + 2 \ln(e/x)$
0	$3e^x + 3e^{-x}$	$5! \left(-\frac{1}{x}\right)^6$	$2x \ln x$
$\frac{4x}{x^4 + 1}$	$-\frac{x^2}{2} + x^2 \ln x$	$\frac{x^5}{5!}$	$6e^x + 6e^{-x}$

(2) Givet att $\int_0^\infty e^{-\pi x^2} dx = 1/2$. Beräkna de fyra integralerna $J = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} dx$,

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx, \quad I_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx, \quad \text{samnt} \quad I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2} dx.$$

(3) a) Bestäm den allmänna lösningen till differkvationen $y'' + 25y = 30 \cos 5x$.
b) Bestäm *den* lösning som startar i vila: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(4) Visa att ekvationen
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$
 beskriver en rät linje i (x, y) -planet,

som går genom de båda punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) .

Del 2. Uppgifter om 5 poäng

(5) För vilka värden på parametern a skär de tre planen
 $2x + ay + 7z = 2$, $ax + y + 6z = 1$, $3x - 2y + z = 1$
varandra längs en gemensam rät linje? Ange också denna linje.

(6) Låt $f(x) = e^{-x^2/2}$. Bestäm de värden f' kan antaga, och ange speciellt de x -värden för vilka grafen $y = f(x)$ lutar så mycket som möjligt. Kan Du skissa grafen?

(7) Rullkurvan. Vi följer en punkt P som sitter på ett hjul med radien R , då hjulet rullar ett varv på plan mark. Om t betecknar den vinkel hjulet rullat från start ($t = 0$) till mål ($t = 2\pi$), kan man visa att

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

där (x, y) är läget (koordinaterna) för punkten P . Hur lång sträcka tillryggalägger punkten P då hjulet rullar ett varv? Är Ditt svar rimligt (se figur)?

[Här fanns en handritad figur som visade ett hjul som rullar ett helt varv på slätt underlag, med en punkt på hjulet markerad. Punkten går i en bana som liknar ett brett, uppochnedvänt U.]

(8) En regelbunden n -hörning (polygon) ligger med alla sina hörn på enhetscirkeln. Beräkna dess area. Vad händer med denna area då n växer obegränsat? Stämmer det?