KTH Matematik
Examinator: Gunnel Roman

Lösningsförslag till Tentamen i SF1623 Matematik I för CL del A 10/10 2007

Inga hjälpmedel. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Uppgifterna 1-3 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).

Uppgifterna 4-6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.

Uppgifterna 7-9 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.

Preliminära betygsgränser: A - 31 poäng varav minst 8 VG-poäng, B - 26 poäng varav minst 6 VG-poäng, C - 21 poäng varav minst 2 VG-poäng, D - 16 poäng, E - 15 poäng, Fx - 13 poäng. Lycka till!!

————————-Uppgifter som motsvarar varsin KS————————-

1. Avgör för vilka reella tal x olikheten $\dfrac{x+3}{x+2} \leq x-1$ gäller.

Lösning: Vi sätter på samma bråkstreck och ser att

$$\frac{x+3}{x+2} \leq x-1 \iff \frac{x+3}{x+2} - \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} \leq 0 \iff \frac{5-x^2}{x+2} \leq 0.$$

Teckenstudium ger att denna olikhet är uppfylld om och endast om $-\sqrt{5} \leq x < -2$ eller $x \geq \sqrt{5}$.

Svar: $-\sqrt{5} \leq x < -2$ eller $x \geq \sqrt{5}$.

2. Finn alla reella lösningar x till ekvationen $\ln x + 2\ln 2x + 3\ln 3 = 4\ln 4$.

Lösning: Vi observerar först att ekvationen bara är definierad då $x > 0$. För sådana x kan vi använda loglagar och potenslagar och få att ekvationen är ekvivalent med ekvationen $\ln x + 2\ln 2 + 2\ln x = 4\ln 4 - 3\ln 3$ vilket i sin tur är ekvivalent med ekvationen $3\ln x = 3(\ln 4 - \ln 3)$ som till sist är ekvivalent med att $\ln x = \ln \dfrac{4}{3}$ vilket efter exponentiering ger att $x = 4/3$.

SVar: $x = 4/3$

3. Beräkna $\sin\left(\arctan\frac{1}{3}\right)$ och $\tan\left(\arccos\frac{7\pi}{6}\right)$.

Lösning och svar: Vi ser direkt via definitionerna och enhetscirkeln att $\sin\left(\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Eftersom definitionsmängden till arccos-funktionen är $[-1, 1]$ och $7\pi/6 > 1$ så är $\tan(\arccos(7\pi/6)$ inte definierat.

——————————- G-uppgifter——————————-

4. Lös ekvationen $\sin 2x = \sin x$. Avgör också om någon eller några av lösningarna ligger i intervallet $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}\right]$.

Lösning: Eftersom $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ kan ekvationen i uppgiften skrivas om till $2\sin x\cos x = \sin x$ som är ekvivalent med att $\sin x = 0$ eller $\cos x = 1/2$. $\sin x = 0$ har lösningarna $x = n\pi$, n godtyckligt heltal, och $\cos x = 1/2$ har lösningarna $x = \pm\pi/3 + n2\pi$, n godtyckligt heltal. Av dessa lösningar ligger precis en, nämligen $x = -\pi/3$ i det specificerade intervallet.

Svar: Ekvationen har lösningarna $x = \pm\pi/3 + n2\pi$ (n godtyckligt heltal) och $x = n\pi$ (n godtyckligt heltal). Av dessa lösningar ligger precis en, nämligen $x = -\pi/3$ i det specificerade intervallet.

5. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $|2x + 3| - |3x - 1| = 1$.

Lösning: Vi delar upp lösningen i tre olika fall.

Fall 1. Om $x \geq 1/3$ så är $|2x + 3| - |3x - 1| = 1$ ekvivalent med ekvationen $2x + 3 - (3x - 1) = 1$ som har lösningen $x = 3$ vilken ligger i det aktuella intervallet.

Fall 2. Om $-3/2 \leq x < 1/3$ så är $|2x + 3| - |3x - 1| = 1$ ekvivalent med ekvationen $2x + 3 + 3x - 1 = 1$ som har lösningen $x = -1/5$ vilken ligger i det aktuella intervallet.

Fall 3. Om $x < -3/2$ så är $|2x + 3| - |3x - 1| = 1$ ekvivalent med ekvationen $-2x - 3 + 3x - 1 = 1$ som har lösningen $x = 5$ vilken ligger utanför det aktuella intervallet.

Svar: Ekvationen har lösningarna $x = 3$ och $x = -1/5$.

6. Avgör om det finns någon konstant term (dvs en term som är oberoende av x) i utvecklingen av $\left(2x^4 - \frac{1}{2x^3}\right)^{14}$. Beräkna i så fall denna konstanta term och ge svaret på formen a/b där a och b är heltal och bråket är förkortat så långt som möjligt.

Lösning: Binomialsatsen ger att

$$\left(2x^4 - \frac{1}{2x^3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} (2x^4)^{14-k} \left(-\frac{1}{2x^3}\right)^k$$

och vi ser att vi får en konstant term precis när $k = 8$. Denna term är

$$\binom{14}{8} (2x^4)^6 \left(-\frac{1}{2x^3}\right)^8 = (-1)^8 \frac{14!2^6}{8!6!2^8} = \frac{3003}{4}.$$

Svar: $\frac{3003}{4}$

——————————-VG-uppgifter——————————-

7. Bestäm alla komplexa tal z som löser ekvationen $z^6 = 27$. Svar ska ges på formen $a + ib$.

Lösning: Vi skriver på polär form $z = re^{iv}$ och $27 = 27e^{n2\pi i}$, där n är ett godtyckligt heltal. Evkationen övergår i $r^6e^{i6v} = 27e^{n2\pi i}$ vilket är ekvivalent med att $r^6 = 27$ och $6v = n2\pi$ varur följer att $r = \sqrt{3}$ och $v = n\pi/3$, n godtyckligt heltal. Dessa lösningar skriver vi nu på rektangulär form:
$n = 0$ ger lösningen $z_0 = \sqrt{3}$
$n = 1$ ger lösningen $z_1 = \sqrt{3}e^{i\pi/3} = \sqrt{3}/2 + i3/2$
$n = 2$ ger lösningen $z_2 = \sqrt{3}e^{i2\pi/3} = -\sqrt{3}/2 + i3/2$
$n = 3$ ger lösningen $z_3 = \sqrt{3}e^{i3\pi/3} = -\sqrt{3}$
$n = 4$ ger lösningen $z_4 = \sqrt{3}e^{i4\pi/3} = -\sqrt{3}/2 - i3/2$
$n = 5$ ger lösningen $z_5 = \sqrt{3}e^{i5\pi/3} = \sqrt{3}/2 - i3/2$
Och detta är alla lösningar för $n = 6$ ger samma lösning som $n = 0$ och övriga värden på n upprepar sedan ovanstående lösningar.

Svar: Lösningarna är $z = \pm\sqrt{3}$ och $z = \pm\sqrt{3}/2 \pm i3/2$

8. Formulera och bevisa faktorsatsen.

Lösning: Se boken sid 52-53

9. Visa med induktion att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

för $n = 1, 2, 3, ...$

Lösning: För varje positivt heltal n låter vi $P(n)$ betyda påståendet $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.

Steg 1, bassteget. För $n = 1$ får vi påståendet $P(1)$ som är att $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ vilket uppenbart är sant. Dvs påståendet $P(1)$ är sant.

Steg 2, induktionssteget. Antag nu att påståendet $P(k)$ är sant för något heltal $k \geq 1$. Då gäller att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

Men i så fall gäller också att

$$1{\cdot}2{+}2{\cdot}3{+}3{\cdot}4{+}\cdots{+}k(k{+}1){+}(k{+}1)(k{+}2) = \frac{1}{3}k(k{+}1)(k{+}2){+}(k{+}1)(k{+}2) = \frac{1}{3}(k{+}1)(k{+}2(k{+}3)$$

vilket är samma sak som att påståendet $P(k+1)$ är sant. Dvs om påståendet $P(k)$ är sant så är också påståendet $P(k+1)$ sant.

Steg 3, slutsats. Av steg 1 och steg 2 följer med induktion att $P(n)$ är sant för alla positiva heltal n, vilket var precis vad vi skulle bevisa.