Lösningsförslag till tentamen den 18 oktober

1. Vi börjar med basfallet $n = 1$. Det är slälvklart!

Sedan, antar vi att formel gäller för något heltal n. Vi skall visa att den gäller också för nästa heltal $n + 1$. Vi har då

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \big[\text{ enligt induktionsantagandet } \big] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger oss formel för $n + 1$. Beviset är klart.

2. Eftersom polynomet har reella koeficienter och komplexa talet $x = -3 - i$ är en rot, det komplex konjugata talet $\bar{x} = -3 + i$ är också en rot. Då är polynomet delbart med produkt

$$(x - (-3 - i))(x - (-3 + i)) = x^2 + 6x + 10.$$

Polynomdivisionen ger

$$2x^3 + 7x^2 - 10x - 50 = (x^2 + 6x + 10)(2x - 5).$$

Detta visar att den tredje roten till polynomet är $x = 5/2$.

3. Avståndet mellan M och punkten N på linjen blir kortast om vektor $\overrightarrow{MN}$ är vinkelrät mot räta linjen. Om N har koordinater $(4 - t, 2t, t + 1)$, då $\overrightarrow{MN} = (3 - t, 2t - 1, t - 1)$. Riktningsvektor för linjen är $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$. Skalärprodukten $\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{v}$ är $6t - 6$. Alltså, det kortaste avståndet motsvarar till punkten N med $t = 1$ d v s $N = (3, 2, 2)$. Avståndet blir $d = \sqrt{5}$.

4. (a) För att hitta skärningspunkt mellan linjerna, räcker det att lösa systemet av ekvationer för variabler t och s:

$$\begin{cases} 3t - 6 = -s - 1; \\ 2t = s + 5; \\ t = 2s + 4 \end{cases}$$

Systemet har lösningen $t = 2$, $s = -1$ och detta ger oss skärningspunkt $(0, 4, 2)$.

(b) Normalvektor till planet måste vara vinkelrät mot både riktningsvektorer av linjerna d v s mot vektorer $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$. Då får man välja den normalvektor som kryssprodukt av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Vi får

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{e}_x - 7\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z.$$

Normalvektor till planet är $(3, -7, 5)$ och dessutom planet går genom skärningspunkt av linjerna $(0, 4, 2)$. Planets ekvation är $3x - 7(y - 4) + 5(z - 2) = 0$ eller $3x - 7y + 5z + 18 = 0$.

5. Enligt minstakvadratmetod, skall man lösa systemet $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \text{och} \qquad A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Systemet $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ har lösningen $x = 1$, $y = -2$.

6. (a) För att bestämma när matrisen är inverterbar är det lättast att beräkna dess determinant. Vi utvecklar den längs första raden och vi får

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 2 - 2a^2.$$

Matrisen då blir inverterbar om $2 \neq 2a^2$ d v s om $a \neq \pm 1$.

(b) Inversmatrisen är

$$\frac{1}{2a^2 - 2} \begin{pmatrix} a^2 - 2 & -a^2 & a \\ -a^2 & a^2 - 2 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Den lättaste metoden är följande. Vi uttrycker först vektoren $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^t$ som linjär kombination:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Talen x_1, x_2, x_3 är lösningar till linjära systemet med matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Det har lösningar $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Då

$$T\mathbf{x} = x_1 T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. Att vektorerna är linjärt beroende är ekvivalent till egenskapen att det finns värdena x_1, x_2, x_3 inte alla lika med 0 sådana att $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$. Detta är ekvivalent till följande: homogena systemet med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

har en icke-trivial lösning. Efter standarta radtransformationer får man matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 8 + 2a \\ 0 & 0 & 4 + a \end{pmatrix}.$$

Motsvarande systemet har icke-triviala lösningar för $a = -4$.

9. Vi söker först egenvärdena till matrisen:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = [\text{ utveckling längst första raden }] =$$

$$= (1-\lambda)\cdot((1-\lambda)^2-9)+4\cdot(-4)\cdot(1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-9-16) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-25).$$

Rötterna är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 6$.

Nu söker vi egenvektorer. För $\lambda_1 = 1$ egenvektor är lösning av homogena system med matrisen

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

och efter normeringen den blir

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogt, för andra och tredje egenvärdena får man normerade egenvektorer

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4/(5\sqrt{2} \\ -3/(5\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4/(5\sqrt{2}) \\ 3/(5\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alltså, $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/(5\sqrt{2}) & 4/(5\sqrt{2}) \\ 4/5 & -3/(5\sqrt{2}) & 3/(5\sqrt{2}) \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/(\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

10. Man verifierar först att summan av två matriser i angiven form är igen en matris i angiven form. Samma gör man för produkt av matrisen med tal. Detta visar att alla sådana matriserna utgör ett vektorrum.

För att bestämma någon bas kan man observera att alla matriserna i angiven form kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta leder till följande val av en bas :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{och} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att visa att det är en bas skall man visa att matriserna A_1 och A_2 är linjärt oberoende och alla matriserna i angiven form kan uttryckas som deras linjära kombinationer. Det sista är redan bevisad genom likheten ovan. Det återstår linjärt oberoende egenskap. Om vi antar att $x_1A_1 + x_2A_2 = 0$ då får man

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = 0$$

vilket ger $x_1 = x_2 = 0$ oh detta visar att matriserna är linjärt oberoende. Till slut, eftersom det finns en bas med två vektorer, avgör vi att dimension är 2.