Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2006-12-19, kl. 08.00-13.00
5B1146, linjär algebra med geometri för IT och ME (5p)

1.Vektorerna u = (–1,–2,2) resp v = (1,–2,1) är linjernas riktningsvektorer. vektorn n = u× v är det sökta planets normalvektor. Vi har

$$n = u\times v = \begin{vmatrix} ex & ey & ez \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2ex + 3ey + 4ez = (2,3,4).$$ Det sökta planets ekvation ges av

(2,3,4) . (x – 3, y – 1, z + 1) = 0 alltså 2x +3y + 4z = 5

$\boxed{\text{Svar: } 2x + 3y + 4z = 5.}$

2. Ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om determinanten det(A) ≠ 0, där A är systemets koefficientmatris. Här har vi

det(A) =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} (\text{-1)rad2 tillrad3}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} (\text{-3)rad2 till rad1}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & a-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} (\text{rad2 byter plats med rad1}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a-3 \\ -1-a & 1 \end{vmatrix} = -(-1-(-1-a)(a-3)) = (1+a)(a+3)-1 = 0 \Rightarrow a = -2 \pm \sqrt{2}$$

Svar: $a \neq 2 \pm \sqrt{2}$

3. matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är symmetrisk. Då finns en övergång ON –matris P som diagonalisera A.dvs $A = PDP^t$.

a) egenvärdena till A ges av

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & \\ -1 & 1-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,1,2$$

b) Egenvektorer till $\lambda = \lambda_k$ ges av $(A - \lambda_k I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

För $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \Rightarrow x = y = t \Rightarrow \\ z = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Välj $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

För $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-1 & -1 & 0\\ -1 & 1-1 & 0\\ 0 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ -x=0\\ z = \text{gotycklig t.ex=1}\end{cases} \Rightarrow x=y=t \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Välj $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

För $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-2 & -1 & 0\\ -1 & 1-2 & 0\\ 0 & 0 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0\\ -x-y=0 \Rightarrow x=-y=t \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ z=0\end{cases}$

Välj $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

ON-matrisen P ges då av

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow PP^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Svar } P^tAP = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4. Vi använder kända räkneregler.

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}^{-1}\right)\right)^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I\right)^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}^{\mathbf{tt}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I$$

Alltså

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}}+\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

Men är detta sant. Vi har räknat utan tänka. . Vi kolla först om A^{-1} finns $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$. Här är $\det(A)=0$ och således går ej att bestämma den givna uttrycket.tal à 4p kräver lite tänkande

Svar: $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}}+\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

5. Lösning

Anpassning av de tre punkterna $(1,-1),(2,0)$ och $(4,1)$ till kurva $y=ax+b\ln x$

Ger följande överbestämda system

$$\begin{cases}a & =-1\\2a+b\ln 2=0\\4a+b2\ln 2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\2&\ln 2\\4&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

normalekvation blir då

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&\ln 2&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&\ln 2\\4&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&\ln 2&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\ln 2\end{pmatrix}$$

detta system kan lösa exempelvis (ej nödvändigt) med Cramers regel

$$a=\frac{\begin{vmatrix}3&10\ln 2\\2\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}=\frac{-5\ln^2 2}{5\ln^2 2}=-1$$

$$b=a=\frac{\begin{vmatrix}21&3\\10\ln 2&2\ln 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}=\frac{12\ln 2}{5\ln^2 2}=\frac{12}{5\ln 2}$$

Svar: den sökta kurvan är $y=-x+\dfrac{12}{5\ln^2 2}\ln x$

6. En godtycklig vektor $\vec{u}=(x,y,z)^t$ projiceras vinkelrätt på linjen dvs längs riktningsvektor $\vec{a}=(1,-1,1)^t$ ges av