Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

Lösningsforslag till tentamen i SF1624 den 22/10 2007

1. Eftersom planet går genom punkten $(1, -2, 0)$, det har ekvation $a(x-1)+b(y+2)+cz=0$, där a, b, c är koefficienter av normalvektor till planet. För att bestämma normalvektor $\mathbf{n}$ tar vi några två vektorer i planet och räknar deras kryssprodukt. Den första vektor i planet är t ex linjens riktningsvektor $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$. Den andra är t ex vektor mellan punkterna $(1, -2, 0)$ och punkten på linjen som svarar till $t = 0$ d v s punkten $(-1, 3, 1)$. Vi får då den andra vektor $\mathbf{v}_2 = (2, -5, -1)$. Deras kryssprodukt blir

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{e}_x - 10\mathbf{e}_z = -5(1, 0, 2).$$

Vi väljer $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$ och vi får planets ekvation $1 \cdot (x-1) + 2z = 0$ eller $x + 2z = 1$.

2. Matrisen till systemet är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a+2 & -2a-4 & -6 \end{array}\right).$$

Två första radoperationer: den första raden adderas till den andra samt den första gånger (-2) adderas till den tredje. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & 2 & -a & -1 \\ 0 & 2a & -4 & -2 \end{array}\right).$$

Nästa radoperationen: den andra raden gånger $(-a)$ adderas till den tredje. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & 2 & -a & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right).$$

Den sista ekvationen är $(a^2-4)z = a-2$. Om $a^2-4 \neq 0$ d v s $a \neq \pm 2$ då har den entydig lösning och två andra ekvationer i systemet lösas också entydigt. Alltså, för $a \neq \pm 2$ systemet har en lösning.

Om $a = 2$, den sista akvationen blir $0 = 0$ och två andra ekvationer ger oändligt många lösningar till systemet. Om $a = -2$, den sista ekvationen blir $0 = -4$ som saknar lösning. Då saknar systemet lösningar också.

3. Enligt metoden, skriver vi först matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

och tillämpar därefter radoperationer för att återföra den vänstra kvadrat till en enhetsmatris. I höger kvadrat då får man den inversa matrisen. Den första radoperationen som behövs för att köra Gausselimination är omkastning av två första raderna. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Därefter kör man Gausselimination på ett vanligt sätt och man får svar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \\ -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Enligt standardformlel för andragradsekvationer, rötterna är

$$z_{1,2} = -1 + i \pm \sqrt{(1-i)^2 - (-4i)} = -1 + i \pm \sqrt{2i}.$$

Nu skall vi bestämma $\sqrt{2i}$ d v s lösa ekvation $w^2 = 2i$. Vi söker w i form $w = x + iy$ med **reella** x och y. Då

$$2i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

varav

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{och} \qquad 2xy = 2.$$

Den första ekvationen ger oss $y = \pm x$. I fallet $y = x$ insättningen till den andra ekvationen ger $2x^2 = 2$ d v s $x = 1 = y$ eller $x = -1 = y$. I fallet $y = -x$ insättningen till den andra ekvation ger oss $-2x^2 = 2$ och den ekvationen saknar **reella** lösningar (och man söker endast **reella** x och y). Alltså, får vi

$$\sqrt{2i} = \pm(1 + i)$$

och insättningen till den första formel ger oss $z_1 = 2i$ och $z_2 = -2$.

5. Bas av induktion d v s fallet $n = 1$ gäller självklart.

Antar nu att formel stämmer för något heltal n. Vi skall visa att samma formel stämmer också för nästa heltal $n + 1$. Vi har då

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \big[\text{ enligt induktionsantagandet }\big] =$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \big[\text{ matrismultiplikation }\big] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket skulle bevisas.

6. Avbildningen skickar varje vektor $\mathbf{u}$ i rummet till en vektor $\mathbf{v}$ där $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2P_l\mathbf{u}$, där $P_l\mathbf{u}$ är projektoin av vektor $\mathbf{u}$ på linjen l vinkelrät mot planet. Om $\mathbf{n}$ är notmalvektor till planet som har längden 1, då projektionen ges av formel $P_l\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ och vi får $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Ur planets ekvation får vi

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{u} = (x, y, z)^t$, då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = x/3 - 2y/3 + 2z/3$. Detta ger oss

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(x/3 - 2y/3 + 2z/3)\cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \\ y + \frac{4}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \\ z - \frac{4}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x/9 + 4y/9 - 4z/9 \\ 4x/9 + y/9 + 8z/9 \\ -4x/9 + 8y/9 + z/9 \end{pmatrix}.$$

Matris av avbildningen blir

$$\begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

7. Antar att $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$. Då talen c_1, c_2 och c_3 är lösningar till homogena systemet med matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efter standarda radoperationer matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a + 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att motsvarande system har endast triviala lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ om $a \neq -3/2$. Då är vektorerna linjärt oberoende. I fallet $a = -3/2$ systemet har oändligt många lösningar och vektorerna är linjärt beroende.

8. Överföringsmatris är

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

och den fungerar så att de gamla koordinaterna (x, y) uttrycks genom de nya (x', y') enligt formel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

d v s

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \qquad \text{och} \qquad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Insättningen av dessa uttryck till ursprungliga kurvans ekvation ger oss efter förenkling

$$y' = x'^2/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}.$$

Det är ekvation av en parabel.

9. Vi söker först egenvärdena till matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Den har rötter $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

Den första egenvektor $\mathbf{v}_1$ som hör till $\lambda_1 = 3$ är lösningen till homogena system med matrisen

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi får vektor i allmän form

$$\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

och efter normaliseringen får vi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektor $\mathbf{v}_2$ som hör till $\lambda_2 = -2$ är lösningen till homogena system med matrisen

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får vektor i allmän form

$$\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

och efter normaliseringen får vi

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Alltså, diagonalmatrisen D och ortogonalmatrisen P är

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

10. Vi antar att det finns något reelt egenvärde λ och motsvarande egenvektor $\mathbf{v} \neq 0$. Då det gäller att

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \qquad \text{och} \qquad A^2\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$$

vilket ger oss

$$0 = (A^2 + A + I)\mathbf{v} = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathbf{v}.$$

Eftersom $\mathbf{v} \neq 0$, det är möjligt endast om

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Men denna andragradsekvation saknar reella lösningar (lätt att kolla!) och vi får motsäjelse. Alltså vårt antagande om existens av reella egenvärdena var fel.