Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1624, Algebra och geometri för E1.
Tentamen, måndagen den 22 oktober 2007 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs tre lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla tre lappskrivningar befrias från tre första uppgifter och får 9p).

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Punkten $(1, -2, 0)$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

ligger båda i ett plan. Bestäm planets ekvation.

(3p) **2.** Bestäm, för samtliga värden på talet a, antalet lösningar till systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & az & = & -2 \\ -x & + & y & & & = & 1 \\ 2x & + & (2a+2)y & - & (2a+4)z & = & -6 \end{array} \right. .$$

(3p) **3.** Bestäm invermatris till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3p) **4.** Lös ekvationen

$$z^2 + (2-2i)z - 4i = 0.$$

(3p) **5.** Visa med hjälp av induktion att

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{för} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4p) **6.** Bestäm matris av den linjära avbildningen i rummet $\mathbb{R}^3$ som ges av speglingen i planet $x - 2y + 2z = 0$.

VÄND!

(4p) **7.** För vilka värden på parametern a är vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

i rummet $\mathbb{R}^4$ linjärt beroende?

(4p) **8.** En kurva i planet med standarda rektangulära koordinater (x, y) har en ekvation

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2y - 2x + 2 = 0.$$

Bestäm kurvans ekvation i ett nytt koordinatsystem (x', y') om nya axlarna är parallela med vektorer

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vad heter kurvan?

(4p) **9.** Diagonalisera ortonalt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

d v s ange ortogonal matris P och diagonal matris D sådana att $A = PDP^t$.

(4p) **10.** En kvadratisk matris A uppfyller matrisekvation

$$A^2 + A + I = 0,$$

där I är enhetsmatrisen. Visa att matrisen A saknar reella egenvärdena.