Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

Lösningsforslag till tentamen i SF1624 den 14/01 2008

1. Låt $A = (1, -2, 2)$. Det minsta avståndet mellan punkten A och punkten $M = (2 - t, 2t, 1 + t)$ på linjen får man om vektor $\overrightarrow{AM} = (1 - t, 2t + 2, t - 1)$ blir vinkelrät mot linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$. Scalärprodukt $\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{v} = 6t + 2$ och den är 0 för $t = -1/3$. Vi får $M = (7/3, -2/3, 2/3)$ och avståndet blir

$$|AM| = |(4/3, 4/3, 4/3)| = 4\sqrt{3}/3.$$

2. Matrisen till systemet är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet har exakt en lösning om dess determinant är skild från 0. Vi räknar

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-2 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)(a-2).$$

Den är skild från 0 om $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

3. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ vara tre kolonner av matrisen A. För att A blir en ON-matris krävs det att dessa vektorer är vinkelräta mot varandra och har längden 1.

Villkor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$ (vilket är ekvivalent med att $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$) ger oss $b = \sqrt{5}/5$. Vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_2| = 1$.

Villkor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$ ger oss $a = 1/3$ och vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_1| = 1$.

Äntligen, villkor $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3$ ger oss $c = \sqrt{5}/3$ och vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_3| = 1$.

4. Ursprungliga polynomet har alla koefficienter reella. Då har det tillsammans med nollstället $z = 2 + i$ det nollstället $\bar{z} = 2 - i$. Detta innebär att vårt ursprungliga polynom kan skrivas i form

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 2(z - (2 + i))(z - (2 - i))(z - z_3),$$

där z_3 är det tredje nollstället. Direkt beräkning ger oss $(z - (2 + i))(z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$ och polynomdivision ger

$$2(z - z_3) = \left(2z^3 - 9z^2 + 14z - 5\right) : \left(z^2 - 4z + 5\right) = 2z - 1.$$

Vi avgör att $z_3 = 1/2$.

5. Bas av induktion d v s fallet $n = 1$ gäller självklart: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$.

Antar nu att formel stämmer för något heltal n. Vi skall visa att samma formel stämmer också för nästa heltal $n+1$. Vi har då

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} =$$

$$= \left[\text{ enligt induktionsantagandet }\right] = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

vilket skulle bevisas.

6. Avbildningen skickar varje vektor $\mathbf{u}$ i rummet till en vektor $\mathbf{v}$ där $\mathbf{v} = \mathbf{u} - P_l\mathbf{u}$, där $P_l\mathbf{u}$ är projektoin av vektor $\mathbf{u}$ på linjen l vinkelrät mot planet. Om $\mathbf{n}$ är normalvektor till planet som har längden 1, då projektionen ges av formel $P_l\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ och vi får $\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Ur planets ekvation får vi

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{u} = (x, y, z)^t$, då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 2x/3 - y/3 - 2z/3$. Detta ger oss

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (2x/3 - y/3 - 2z/3)\cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \\ y + \frac{1}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \\ z + \frac{2}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x/9 + 2y/9 + 4z/9 \\ 2x/9 + 8y/9 - 2z/9 \\ 4x/9 - 2y/9 + 5z/9 \end{pmatrix}.$$

Matris av avbildningen blir

$$\begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 4/9 & -2/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

7. Vi uttrycker först $\mathbf{x}$ som linjär kombination

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att man skall lösa linjära systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Systemet har lösningen $c_1 = -3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$. Detta ger oss

$$T\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Matrisen av kvadratiska formen blir

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma om formen är positiv definit skall vi räkna matrisens egenvärdena. Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \Big[\text{ utveckling längst andra raden }\Big] =$$

$$= (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 \\ 7 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda - 1).$$

Egenvärdena blir $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 7 + \sqrt{50}$ och $\lambda_3 = 7 - \sqrt{50}$. Eftersom $\lambda_3 < 0$ och $\lambda_1 > 0$, avgör vi att den kvadratiska formen är ej definit. Den kan anta både positiva och negativa värden.

9. Vi söker först egenvärdena till matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \Big[\text{ den första raden adderas till den andra }\Big] =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \Big[\text{ utveckling längst andra raden }\Big] =$$

$$= -(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}. =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1)^3.$$

Vi ser att det enda egenvärdet är $\lambda = 1$.

Vi söker nu egenvektorer som hör till $\lambda = 1$. Vi har

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande homogena system har lösningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t - 2s \end{pmatrix}.$$

Det är allmän form av egenvektorer.

10. Man kollar direkt att en linjär kombintion av polynom av grad högst tre med egenskap $p(1) = 0$ är igen polynom av grad högst 3 med egenskap $p(1) = 0$. Detta visar att sådana polynom utgör ett vektorrum. För att bestämma en bas skriver vi en allmän polynom av grad högst tre i form $p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. Vi ser att $p(x) = 0$ om och endast om $a = 0$. Detta visar att vi sysslar med alla polynom i form $b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ med godtyckliga b, c och d. En bas blir då polynomen $p_1(x) = x-1$, $p_2(x) = (x-1)^2$ och $p_3(x) = (x-1)^3$. De är linjärt oberoende ty ekvation $c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3$ uppfylls för alla x endast om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Och alla polynom i vårt vektorrum uttrycks som linjära kombinationer av polynom p_1, p_2, p_3. Detta bevisar att vi får an bas.

Eftersom basen består av tre stycken polynom, dimension av vektorrummet är tre.