Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1624, Algebra och geometri för E1.
Tentamen, måndagen den 14 januari 2008 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs tre lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla tre lappskrivningar befrias från tre första uppgifter och får 9p).

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Bestäm avståndet från punkten $(1,-2,2)$ till räta linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

(3p) **2.** Ange alla a-värden för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

har exakt en lösning.

(3p) **3.** Bestäm konstanterna a, b och c så att matrisen A blir en ON-matris då

$$A = \begin{pmatrix} a & -2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & b & -4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(3p) **4.** Polynomet $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5$ har ett nollställe $z = 2+i$. Bestäm samtliga nollställen till polynomet.

(3p) **5.** Visa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

(4p) **6.** Bestäm matris av den linjära avbildningen i rummet $\mathbb{R}^3$ som proekterar en godtycklig vektor vinkelrät på planet $2x - y - 2z = 0$.

VÄND!

(4p) **7.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning. Det är givet att

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $T\mathbf{x}$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(4p) **8.** Finns det någon punkt (x, y, z) där den kvadratiska formen

$$6x^2 + 7y^2 + 8z^2 + 14xz$$

antar ett negativt värde?

(4p) **9.** Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4p) **10.** Visa att mängden av alla polynom $p(x)$ av grad ≤ 3 som uppfyller $p(1) = 0$ utgör ett vektorrum. Ange någon bas av vektorrummet. Vad är dimension av vektorrummet?