KTH-Matematik

Karim Daho

Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2008-05-31, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

1. (a) $\dfrac{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{-v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -\dfrac{3}{5}$

(b) $\mathbf{Proj_u(v)} = \left[\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right] = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{e})\mathbf{e} = \dfrac{6}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (se kursboken : Projektionssatsen sid 36)

2. (a) Ej unik lösning om och endast om $\det(A) = 0$ (se sats 5.1 sid 271)

$\det(A) = 6a^2 + a - 7 = 0 \Rightarrow a = 1, -\dfrac{7}{6}$

(b) Tag t ex $a = 1$ och låt **b** vara nollvektorn. Vi har då ett homogent system som ju alltid har oändligt många lösningar om det inte finns en unik sådan.(se sats 5.2 sid 275)

3. Vi har $\sqrt{3} + i = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$ och $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$. de Moivres sats ger $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^5}{1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{2^5(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6)}{2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)} = 2^4\big(\cos(5\pi/6 - \pi/3) + i\sin(5\pi/6 - \pi/3)\big) = 16i.$

4. se kursboken ex 5.14 sid 285.

5. Vi har $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{BX} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^t$ (om $\boldsymbol{B}$ är inverterbar). Man får

$\boldsymbol{B}^{-1} == \dfrac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ och

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^t =. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}$

6a. Den första linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{u} = (3,2,3) - (2,1,5) = (1,1,-2)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{p}(s) = (3,2,3) + s(1,1,-2) = (3 + s, 2 + s, 3 - 2s)$.

Den andra linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (0,1,7) - (2,2,4) = (-2,-1,3)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{r}(t) = (0,1,7) + t(-2,-1,3) = (-2t, 1 - t, 7 + 3t)$.

I skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{r}(t)$ dvs

$$\begin{cases} 3 + s = -2t \\ 2 + s = 1 - t \\ 3 - 2s = 7 + 3t \end{cases}$$

vilket ger $s = 1$, $t = -2$. Skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(1) = (4,3,1)$.

6b. Planets normalvektorn är $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1,1,1)$ och planet går genom punkten $(3,2,3)$. Planets ekvation ges av $(1,1,1)(x - 3, y - 2, z - 3) = 0$, dvs $x + y + z = 8$.

7. Koefficientmatrisen är $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ och dess determinant är $a - b^2$. Eftersom ekvationssytemet skall ha precis en lösning så måste $a \neq b^2$. Å andra sidan skall $x = 1$, $y = 1$ vara en lösning till ekvationssytemet vilket innebär att

$$\begin{cases} a+b=b+b^2 \\ b+1=1+b \end{cases}$$

alltså måste $a = b^2$.

Svar: Det finns inga sådana konstanter.

8. Se kursboken Ex 7.11 sid 340. Där finner man följande egenvärden med motsvarande egenvektorer:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (0,1,-2)^t, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2)$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = (1,0,0)^t, \quad \hat{\mathbf{u}} = (1,0,0)$$

$$\lambda = 10 \Rightarrow \mathbf{w} = (0,2,1)^t, \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$$

$\{\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ **bildar en ON - bas.** vi får en ON-matris $P : PP^t = I$, där

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ Och } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar $A = PDP^t$

$$PDP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A$$

9. De tre ingredienserna kostar x, y respektive z kr/liter. En blandning i proportionerna 1:1:2 kostar a kr/liter. Då gäller

$$\begin{cases} 3x + y + z = (3+1+1) \cdot 48 \\ 2x + y + 2z = (2+1+2) \cdot 80 \\ x + y + 2z = (1+1+2) \cdot a \end{cases}$$

Man får

$$x = 400 - 4a, \; y = 16a - 1520, \; z = 560 - 4a$$

och eftersom $x > 0, y > 0$ och $z > 0$ så får vi att $95 < a < 100$.

10. Ekvationen $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ kan skrivas på formen $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} A\, \mathbf{x} = 1$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Den karakteristiska ekvationen = $(\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$ ger två positiva egenvärden $\lambda = 6$ och $\lambda = 1$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips. Genom en vridning kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $6\xi^2 + \eta^2 = 1$ vars halvaxellängder är $1/\sqrt{6}$ och 1. Det maximala avståndet mellan två punkter på denna ellips är 2.

Svar: nej