KTH-Matematik
Karim Daho
Tentamenskrivning, 2008-05-31, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

Preliminära gränser. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. För övriga betyg är gränsen 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p (Fx) erbjuds möjlighet till komplettering till betyg E. Kontakta i så fall läraren. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. **Lösningsförslaget skall textförklaras**.
Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.)
Inga hjälpmedel!
Den som blivit godkänd på KS x , $1\leq x \leq 3$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS x , så skall motsvarande tal x inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestäm *cosinus* av vinkel mellan vektorerna **u** och $-$ **v.**

(b) Bestäm $\mathbf{Proj_u(v)}$, dvs den ortogonala projektionen av **v** på **u.**

2. (a) För vilka värden på talet a gäller att ekvationssystemet A**x**=**b** **inte** har unik lösning om

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -a & 1\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$$

(b) Ge exempel på ett tal a och en vektor **b** så att A**x**=**b** har oändligt många lösningar.

3. Skriv $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{1+i\sqrt{3}}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Svaret får inte innehålla trigonometriska uttryck.

4. Undersök om vektorerna $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-7\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}4\\5\\7\\1\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende i rummet $\mathbb{R}^4$.

5. Lös matrisekvationen $A^t X^{-1} = B$, där $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ och $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Var god vänd

4-poängsuppgifter

6. Linjen L1 går genom punkterna (3,2,3) och (2,1,5). Linjen L2 går genom punkterna (0,1,7) och (2,2,4).
a. Bestäm skärningspunkten mellan L1och L2.
b. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller L1 och L2.

7. Undersök om det finns konstanterna a och b sådana att ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + by = b + b^2 \\ bx + \ \ y = 1 + b \end{cases}$$

får precis en lösning $x = 1$, $y = 1$.

8. Bestäm den symmetriska matrisen A som har egenvektorn $(0,1,-2)^t$ med egenvärdet 0, egenvektorn $(1,0,0)^t$ med egenvärdet 1 och egenvektorn $(0,2,1)^t$ med egenvärdet 10.

9. Till en nyårsfest har tre sorters kostbara ingredienser medförts. Frampå natten har Kista lyckats få klart för sig att en blandning av ingredienserna i proportionerna 3:1:1 kostar 48 kr/liter, medan en blandning i förhållandet 2:1:2 kostar 80 kr/liter. Mellan vilka värden kan kostnaden för en liter av blandningen i proportionerna 1:1:2 ligga? Varje ingrediens har ett pris som är > 0.

10. Låt P och Q vara två godtyckliga punkter på kurvan $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$.
Kan avståndet mellan P och Q vara lika med 3?