Institutionen för matematik, KTH
Armin Halilovic, Serguei Shimorin, Alan Sola

SF1624, Algebra och geometri
Tentamen, tisdagen den 21 oktober 2008 kl 14.00–19.00.
Lösningsförslag

1. Vi betecknar $u = z^2$ och vi får den följande ekvationen för den nya variabel u:

$$u^2 - 2\sqrt{3}u + 4 = 0.$$

Den har rötter $u = \sqrt{3} \pm i$ vilket innebär att vi skall lösa ekvationer $z^2 = \sqrt{3} + i$ samt $z^2 = \sqrt{3} - i$. För den första ekvation skriver vi högerledet i polär form:

$$\sqrt{3} + i = 2(\sqrt{3}/2 + i/2) = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Om $z = re^{i\phi}$, då får vi ekvationen

$$r^2 e^{2i\phi} = 2e^{i\pi/6}$$

vilket ger $r = \sqrt{2}$ och $2\phi = \pi/6 + 2\pi k$. Detta ger oss två rötter $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$ och $z_2 = \sqrt{2}e^{13i\pi/12}$.

Analogt, den andra ekvationen ger oss två andra rötter $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\pi/12}$ och $z_4 = \sqrt{2}e^{-13i\pi/12}$.

2. Alla räta linjer som går genom punkten $A = (1, 2, -1)$ och linjen $l_1 : (x, y, z) = (3t, 1 + 2t, t)$ bildar ett plan.
Först bestämmer vi planets ekvation. Punkten $B = (0, 1, 0)$ ligger på linjen l_1. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, -1, 1)$ och $v = (3, 2, 1)$ En normalvektor till planet är

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1. \end{pmatrix}$$

Härav $\mathbf{n} = (-3, 4, 1)$. Planets ekvation genom A och l_1 är alltså $-3(x-1) + 4(y-2) + 1(z+1) = 0$ eller efter förenkling

$$-3x + 4y + z - 4 = 0 \qquad (*).$$

För att bestämma eventuella skärningspunkter mellan planet (*) och den andra linjen $l_2 : (x, y, z) = (2 + 2t, -t, 1 + 2t)$ substituerar vi linjens ekvationer

$$x = 2 + 2t, \qquad y = -t, \qquad z = 1 + 2t$$

i ekvationen (*)och får

$$-3(2 + 2t) + 4(-t) + (1 + 2t) - 4 = 0 \qquad \Rightarrow$$

vilket ger

$$t = \frac{-9}{8}, \qquad x = \frac{-1}{4}, \qquad y = \frac{9}{8}, \qquad z = \frac{-5}{4}.$$

Den sökta linjen går genom punkterna $P = (\frac{-1}{4}, \frac{9}{8}, \frac{-5}{4})$ och $A = (1, 2, -1)$. Därför har den sökta linjen en riktningsvektor

$$r_1 = (\frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4})$$

Vi kan byta mot

$$r_2 = 8r_1 = (10, 7, 2).$$

Härav får vi den sökta linjens ekvationer

$$(x, y, z) = (1 + 10t, 2 + 7t, -1 + 2t)$$

eller $x = 1 + 10t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = -1 + 2t.$
2. Svar: $x = 1 + 10t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = -1 + 2t.$

3. Vi hittar först riktningsvektorn längs linjen. Den ges av koefficienter inför parameter t: $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$ och efter normaliseringen får vi vektorn $\mathbf{w} = (1, 2, -2)/\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = (1/3, 2/3, -2/3)$.

Projektion på linjen med riktningsvektorn $\mathbf{w}$ ges av formel

$$P\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}.$$

Om vektorn $\mathbf{u}$ har koordinater $(x, y, z)^T$ då får vi

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = x/3 + 2y/3 - 2z/3$$

vilket ger

$$P\mathbf{u} = (x/3 + 2y/3 - 2z/3) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/9 + 2y/9 - 2z/9 \\ 2x/9 + 4y/9 - 4z/9 \\ -2x/9 - 4y/9 + 4z/9 \end{pmatrix}.$$

Koefficienterna inför variabler x, y oc z ger oss matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

4. Vi åberopar en sats i kursboken som säger att en $n \times n$-matris är diagonaliserbar om och endast om det existerar n linjärt oberoende egenvektorer till matrisen. Det räcker i vårt fall alltså att undersöka om matrisen A har tre linjärt oberoende egenvektorer.

Vi börjar med att bestämma egenvärdena till matrisen. Vi gör detta genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1}$$

Vi observerar att A är en undertriangulär matris, och detta medför att

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2. \tag{2}$$

Den karakteristiska ekvationen blir alltså

$$(1-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0, \tag{3}$$

vilket medför att A har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$. Eftersom två egenvärden sammanfaller är det inte säkert att A har tre linjärt oberoende egenvärden. Vi inser att det är möjligt att diagonalisera A endast om det finns två linjärt oberoende egenvektorer som hör till $\lambda_2 = 3$.

Vi bestämmer därför egenvektorerna i detta fall. Vi söker de vektorer $\mathbf{v} = (v_1\, v_2\, v_3)^t$ som satisfierar

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Första raden i ovanstående ekvationssystem ger emellertid att $v_1 = 0$, och tredje raden medför därefter att även $v_2 = 0$. Komponenten v_3 kan däremot väljas godtyckligt. Vi drar slutsatsen att egenvektorerna till A som hör till egenvärdet $\lambda_2 = 3$ alla är på formen

$$\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Detta innebär att det bara finns två linjärt oberoende uppsättningar egenvektorer till A, och således är A inte diagonaliserbar.

5. Systemet har entydig lösning precis då determinanten av koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & (a+1) & a \end{pmatrix}$$

inte är noll.

$$det(A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & (a+1) & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4, a = 2$$

i) alltså har systemet exakt en lösning då $det(A) \neq 0$ dvs ($a \neq 4$ och $a \neq 2$). Vi kan bestämma lösningen t ex med hjälp av Cramers regel:

$$D = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & (a+1) & a \end{vmatrix} = a^2 - 6a + 8 = (a-4)(a-2),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & (a+1) & a \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 4 = (a-4)(a-1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 4 - a = -(a-4),$$

$$D_z = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & (a+1) & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Därför

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(a-4)(a-1)}{(a-4)(a-2)} = \frac{a-1}{a-2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(a-4)}{(a-4)(a-2)} = \frac{-1}{(a-2)} = \frac{1}{2-a},$$

och

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{(a-4)(a-2)} = 0.$$

ii) $a = 4$. Sätter vi in $a = 4$ i det givna ekvationssystemet får vi (med hjälp av Gausseliminatinsmetoden)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+4y+3z &= 1 \\ 3x+5y+4z &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2y+z &= -1 \\ 2y+z &= -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2y+z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

som ger oändligt många lösningarna $x = (3-t)/2$, $y = (-1-t)/2$, $z = t$, där t är ett godtyckligt tal .

iii) $a = 2$.

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+3z &= 1 \\ 3x+3y+2z &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ z &= -1 \\ -z &= -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ z &= -1 \\ 0 &= -2 \end{cases}$$

Ingen lösning om $a = 2$.

5. Svar:

i) Om $a \neq 2$ och $a \neq 4$ har systemet exakt en lösning $x = (a-1)/(a-2)$, $y = -1/(a-2)$, $z = 0$.

ii) $a = 4$ oändligt många lösningar $x = (3-t)/2$, $y = (-1-t)/2$, $z = t$, t godtyckligt reellt tal.

iii) $a = 2$ ingen lösning

6. Vi använder induktinsbevis.

a) Vi studerar först startvärdet $n = 1$

$$VL = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$HL = \begin{pmatrix} a^1 & a^{1-1} & \frac{1(1-1)}{2}\,a^{1-2} \\ 0 & a^1 & a^{1-1} \\ 0 & 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Alltså VL = HL och påståendet är sant för $n = 1$.
b) Antag att det för ett givet n gäller påståendet *P(n)* dvs att

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Vi vill visa att

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \frac{(n+1)n}{2}\,a^{n-1} \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Vi använder antagandet, multiplicerar (*) (t ex från vänster) med

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

och får

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Härav

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & [\frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-1} + na^{n-1}] \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \frac{n^2-n+2n}{2}\,a^{n-1} \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \frac{(n+1)n}{2}\,a^{n-1} \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Alltså vi har bevisat b) d v s att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Vi har visat de två stegen i induktionsprincipen, vilket ger oss att påståendet gäller för varje heltal $n \geq 1$.

7. Vi bestämmer först matrisen för T relativt standardbasen. Det räcker att beräkna bilden av vektorerna $\mathbf{e_1}$ samt $\mathbf{e_2}$ under T:

$$T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} \quad \text{samt} \quad T(\mathbf{e_2}) = -\mathbf{e_2}. \tag{6}$$

Om vi låter A beteckna matrisen relativt standardbasen får vi

$$A = ((T(\mathbf{e_1}) \quad T(\mathbf{e_2})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Vi ska nu bestämma matrisen för avbildningen T i basen $\mathcal{B}$ genom att genomföra ett basbyte. Vi låter P beteckna matrisen som avbildar en koordinaterna för en vektor i basen $\mathcal{B}$ på koordinaterna i standardbasen $\mathcal{S}$.

Kolonnerna i P ges av koordinaterna för $b_1 = (1\ 2)^t$ respektive $b_2 = (2\ 1)^t$ i standardbasen. Vi har således

$$P = ([\mathbf{b_1}]_{\mathcal{S}} \quad [\mathbf{b_2}]_{\mathcal{S}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Vi måste även bestämma den inversa matrisen P^{-1} som avbildar koordinatvektorer i $\mathcal{S}$ på koordinatvektorer i $\mathcal{B}$. Vi har att

$$\mathbf{e_1} = -\frac{1}{3}\mathbf{b_1} + \frac{2}{3}\mathbf{b_2} \quad \text{samt} \quad \mathbf{e_2} = \frac{2}{3}\mathbf{b_1} - \frac{1}{3}\mathbf{b_2}, \tag{9}$$

vilket ger oss

$$P^{-1} = ([\mathbf{e_1}]_{\mathcal{B}} \quad [\mathbf{e_2}]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ett annat alternativ för att bestämma P^{-1} är att invertera matrisen P på sedvanligt sätt.

Vi får nu matrisen för T i basen $\mathcal{B}$ genom att beräkna

$$A_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP,$$

och vi finner att

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

8. Enligt spektralsatsen, varje symmetrisk matris med reella element har en ON bas av egenvektorer. Speciellt innebär detta att matrisen har åtminståne ett reelt egenvärde (det kan hända att egenvärdena som hör till olika egenvektorer alla sammanfaller).

Om λ är ett reelt egenvärde av A och $\mathbf{v} \neq 0$ är motsvarande egenvektor, då $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ enligt definition. Detta ger oss $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$ och vi får

$$(A^2 + I)\mathbf{v} = (\lambda^2 + 1)\mathbf{v}.$$

Eftersom $A^2 + I = 0$ enligt antagandet, får vi $(\lambda^2 + 1)\mathbf{v} = 0$ vilket ger $\lambda^2 + 1 = 0$ (eftersom $\mathbf{v} \neq 0$). Ekvationen $\lambda^2 + 1 = 0$ upfylls inte för reella tal λ vilket ger oss motsäjelse.

Slutsats: det finns ingen symmetrisk matris A som uppfyller ekvationen.