Institutionen för matematik, KTH
Armin Halilovic, Serguei Shimorin, Alan Sola

SF1624, Algebra och geometri
Tentamen, tisdagen den 21 oktober 2008 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 14 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 17p för D, 20p för C, 23p för B samt 25p för A. Den som får 13p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs fyra lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla lappskrivningar befrias från uppgifter 1-4 och får 12p). För studenter på M ersätter inlämningsuppgiften uppgift 3.

L Y C K A   T I L L !

(3p) **1.** Lös ekvationen $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$. Svaret får anges på polär form.

(3p) **2.** Bestäm parametriska ekvationerna för den räta linjen som går genom punkten $(1, 2, -1)$ och skär de båda linjerna $(x, y, z) = (3t, 1 + 2t, t)$ och $(x, y, z) = (2 + 2t, -t, 1 + 2t)$.

(3p) **3.** Bestäm matrisen A (i standardbas) för den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som projicerar en godtycklig vektor $\mathbf{u}$ på linjen $(x, y, z) = (t, 2t, -2t)$.

(3p) **4.** Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar.

(4p) **5.** Undersök för vilka värden på konstanten a har ekvationssystemet, med avseende på x, y och z,

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + ay + 3z &= 1 \\ 3x + (a+1)y + az &= 2 \end{cases}$$

precis en lösning, oändligt många lösningar resp. ingen lösning. I de fall då lösningar finns, skall dessa också bestämmas.

(4p) **6.** Visa (t ex med hjälp av induktion) att

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, ...)$$

(4p) **7.** Ange matrisen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av spegling i x-axeln relativt standardbasen och bestäm därefter matrisen för T relativt basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4p) **8.** Finns det någon symmetrisk matris A med reella element som uppfyller matrisekvation

$$A^2 + I = 0 \ ?$$

Ledning: undersök egenvärdena och egenvektorer av A.