KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2008-12-16, kl. 14.00-19.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1och CMIEL1(7,5hp)

Lösningsförslag

3-poängsuppgifter

1. Vi väljer en godtycklig punkt på linjen: T.ex för $t = 0$ får vi punkten $(2,-1,1)$. Bilda vektorn $\boldsymbol{v}$ från denna punkt till punkten $(3,1,-1)$: $\boldsymbol{v} = (1,2,-2)$. Denna vektorn, samt linjens riktningsvektorn $\boldsymbol{r} = (3,2,-3)$ är parallella med planet. Kryssprodukten $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ är planets normalvektorn. Man får

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} = \left|\begin{matrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -6\mathbf{e}_x - 6\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z - 6\mathbf{e}_z + 4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Planets ekvation är på formen $2x + 3y + 4z = d$ och punkten $(3,1,-1)$ uppfyller ekvationen, vilket ger $d = 5$.
Svar : $2x + 3y + 4z = 5$

2. Ekvationssytemet kan skrivas på formen $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

En minstakvadrat lösningen fås ur normalekvationen $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 9y = 0 \\ -9x + 18y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,\ y = 1.$$

Svar $x = 1, y = 1$

3. Sedvanlig matriskalkyl ger att

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

T.ex Invertering av 2x2-matriser ger

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 3 - 1\cdot 7}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Svar

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -27 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

4. **Bassteg** Vi har $11^1 - 4^1 = 11 - 4 = 7$ är delbart med 7.
Induktionssteg: vi antar att för ett fixt m är $11^m - 4^m$ är delbart med 7, dvs $11^m - 4^m = 7k$ för något heltal k. Vi visar *att* $11^{m+1} - 4^{m+1}$ är delbart med 7. Vi har

$$11^{m+1} - 4^{m+1} = 11\cdot 11^m - 4\cdot 4^m = (7+4)11^m - 4\cdot 4^m$$

Då är $= 7\cdot 11^m + 4\left(11^m - 4^m\right) = \left[\text{antagandet} 11^m - 4^m = 7k\ \right]$

$$= 7\cdot 11^m + 4\cdot 7k = 7\left(11^m + 4k\right),$$

Också delbart med 7.
Slutsatsen Eftersom vi har visat att påstående gäller för bassteget ***n=1*** samt att antagandet att påstående gäller för ***n=m*** medför att det också gäller för ***n=m+1*** , följer det från induktionsprincipen att påståendet gäller för varje heltal $n = 1,2,3,\cdots$
Alternativ lösning binomialsatsen ger att

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ som ger $11^n - 4^n = (11-4)\sum_{k=0}^{n-1} 11^k 4^{n-k-1} = 7\sum_{k=0}^{n-1} 11^k 4^{n-k-1}$

dvs $11^n - 4^n$ är delbart med 7.

5. (a) Med planets normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är

$$A\vec{x} = \vec{x} - 2\frac{\vec{x}\bullet\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\text{ ., där } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Vi får att

$A = \left(A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_2\right)$

$$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 - 2\frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_2 = \vec{e}_2 - 2\frac{\vec{e}_2 \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 - 2\frac{\vec{e}_3 \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} A =$$

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Spegelbildens ortsvektor är

$$A\left(\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6a. Vektorerna $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ är linjärt beroende precis då linjära ekvationssystemet

$$x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ har icke-triviala lösningar} \Leftrightarrow$$

systemet matris A är inte inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$. Men

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(2-a).$$

Delsvar . Vektorerna $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ är linjärt beroende då $a = -1$ eller $a = 2$

6b. Systemet är entydigt lösbart för varje Hl om $\det(A) \neq 0$ dvs om $a \neq -1$ och $a \neq 2$.
Vi undersöker fallen

$$a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dvs systemet har oändligt många lösningar, samt

$$a=2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

där av rad 2 utläses att systemet saknar lösning

<u>**Svar:**</u>

a) $a=-1$ eller $a=2$

b) $a=-1$: oändligt många lösningar

$a=2$: Systemet ej lösbart;

entydigt lösning i övrigt.

7. Egenvektorer $\vec{f}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonala men ej normerade

Vi normera dessa och sätt övergångmatrisen

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ som är en On-matris . Ty

$$PP^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enligt teorin ges matrisen A av

$$A=PDP^t \Leftrightarrow P^tAP=D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$A=PDP^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Således är matrisen A symmetrisk som enligt diagonaliseringssatsen kan diagonaliseras av en ON matris bestående av en ON bas av egenvektorer.

8. De båda relationerna

$\begin{cases} \vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{u}_1+\vec{u}_2 \\ |\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2=|\vec{u}_1|^2+|\vec{u}_2|^2 \end{cases}$ ger tillsammans med Pythagoras sats att

$$|\vec{u}_1+\vec{u}_2|^2=|\vec{v}_1+\vec{v}_2|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+2\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2=\left[\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2=0\right]=|\vec{u}_1|^2+|\vec{u}_2|^2$$

Men

$$\left|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right|^2 = \left|\vec{u}_1\right|^2 + \left|\vec{u}_2\right|^2 + 2\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2$$

Vilket ger att

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$$