KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2008-12-16, kl. 14.00-19.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1och CMIEL1(7,5hp)

Preliminära gränser. Registrerade på kursen SF1624 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är
26-28p för betyg A;23-25p för betyg B;20-22p för betyg C;17-19p för betyg D;14-16p för betyg E.
Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!
De som är redan registrerade på 5B1146 får betyg 5, 4, 3,K, U enligt det gamla systemet.
Betygsgränserna då är
26p för betyg 5;22p för betyg 4;14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.) Inga hjälpmedel!

Den som blivit godkänd på KS X , $1\leq X \leq 4$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X, så skall motsvarande tal X inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och punkten $(3,1,-1)$.

2. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - \ \ y = 3 \\ \ \ x + \ \ y = 0 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$.

3. Beräkna den matris X som löser följande matrisekvation:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Visa med hjälp av den matematiska induktionen att
$$11^n - 4^n$$
är jämnt delbart med 7 för alla heltal $n \geq 1$.

Var god Vänd

4-poängsuppgifter

4. Betrakta planet $\pi: -2x + y + 2z = 0$.
(a) Beräkna matrisen för den linjära avbildningen $\vec{y} = A\vec{x}$ som speglar rummets vektorer i planet π.
(b) Använd sedan denna matris för att beräkna spegelbilden av punkten $Q = (1,2,3)$ i planet π.

6 Betrakta vektorerna $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + a\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, där $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är standard ON-basen i $\mathbb{R}^3$.
a) För vilka värden på konstanten a är $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ är linjärt beroende?
b) Ange för alla a antalet lösningar till det linjära systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7 En $(3x3)$-matris A har egenvärden $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ och motsvarande egenvektorer $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bestäm matrisen A.

8 Vid en sk *elastisk* stöt mellan två partiklar med samma massa gäller att

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 & (1) \\ |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 & (2) \end{cases}$$

Här är $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ partiklarnas hastigheter före kollisionen och $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ partiklarnas hastigheter efter kollisionen. Relationerna betyder att både rörelsemängd och rörelseenergi bevaras. Visa att om $\vec{v}_1$ är ortogonal mot $\vec{v}_2$ så är också $\vec{u}_1$ ortogonal mot $\vec{u}_2$.