KTH Matematik
S. Shimorin, A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri:
lösningsförslag till tentamen den 7 jan 2009

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$z^4 + iz^3 + 2z^2 = 0.$$

Lösning Vi noterar först att

$$z^4 + iz^3 + 2z^2 = z^2(z^2 + iz + 2),$$

och därmed har polynomet i vänsterledet en dubbelrot $z = 0$. För att bestämma de resterande rötterna genomför vi en kvadratkomplettering:

$$z^2 + iz + 2 = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 2 = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}.$$

Vi får alltså ekvationen

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4},$$

och därmed har vi

$$z + \frac{i}{2} = \pm\frac{3}{2}i.$$

Detta ger oss ytterligare två lösningar till den ursprungliga ekvationen, nämligen

$$z = -2i \quad \text{och} \quad z = i.$$

De sökta lösningarna är alltså $z = 0$, $z = -2i$ samt $z = i$.

2. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna

$$p_1 = (1, 2, -1), \quad p_2 = (2, 3, 1) \quad \text{och} \quad p_3 = (3, -1, 2).$$

Avgör därefter om linjen ℓ som på parameterform har utseendet

$$\ell : (1, 0, 0) + t(1, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R},$$

Var god vänd!

skär detta plan. Bestäm skärningen om så är fallet.

Lösning Den allmänna formen för planets ekvation är

$$ax + by + cz + d = 0,$$

och vi har att bestämma a, b, c och d. Vi vet att de tre givna punkterna ska uppfylla planets ekvation, och detta leder till ett underbestämt ekvationssystem för a, b, c och d:

$$\begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ 2a + 3b + c + d = 0 \\ 3a - b + 2c + d = 0 \end{cases}.$$

Vi löser systemet och får en lösning på parameterform:

$$a = -\frac{9}{16}t, \quad b = -\frac{1}{16}t, \quad c = \frac{5}{16}t, \quad d = t.$$

Om vi speciellt väljer $t = 16$ får planets ekvation på formen

$$-9x - y + 5z + 16 = 0.$$

Observera att planet är invariant under omskalning, så andra val av t är möjliga.

Vi undersöker därefter om linjen ℓ skär planet. Insättning av parameterframställningen för linjen i planets ekvation ger

$$-9(1 + t) - t + 5 \cdot 2t + 16 = 0.$$

Eftersom detta ger $7 = 0$ finns det inga t för vilka ekvationen är uppfylld, och således saknar linjen och planet skärningspunkter.

3. Bestäm de reella talen a och b för vilka matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

är en ortogonal matris (ON-matris) för varje θ.

Ge för varje sådant par a och b en geometrisk tolkning av den linjära avbildningen som hör till ON-matrisen.

Lösning Enligt en sats i boken är A en ON-matris om kolonnerna i A utgör en ortonormal mängd, det vill säga, om kolonnerna i A är parvis vinkelräta och har längd 1.

Vi ser snabbt att de första två kolonnerna är vinkelräta. För att den första och den tredje kolonnen ska vara vinkelräta måsta vi ha

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

och eftersom skalärprodukten är $a\cos\theta$ måste vi ha $a = 0$ för att kolonnerna ska vara vinkelräta för alla θ. Detta val av a gör också att den andra och den tredje kolonnen är vinkelräta.

Vi inser med hjälp av trigonometriska ettan att de första två kolonnerna har längd ett. Den tredje kolonnen har (med $a = 0$) längden b^2. Vi kan alltså välja $b = 1$ eller $b = -1$.

Om vi väljer $a = 0$ och $b = 1$ svarar den resulterande matrisen mot en rotation av rummet med θ radianer kring z-axeln. Valet $a = 0$ och $b = -1$ motsvarar en rotation kring z-axeln och en spegling i xy-planet.

4. Vi söker först egenvärdena till matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

vilket ger

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Ekvationen har rötter $\lambda_1 = 3$ samt $\lambda_2 = -2$ som är egenvärdena till matrisen. Diagonalmatrisen D i diagonaliseringen blir alltså

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nu söker vi egenvektorer till A. För $\lambda_1 = 3$ får vi

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Om

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

är första egenvektor som hör till λ_1, då koordinaterna x, y uppfyller ekvationen

$$-4x - 2y = 0$$

Var god vänd!

vilket ger

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Normalisering ger $t = 1/\sqrt{5}$ och vi får

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

För $\lambda_2 = -2$ får vi

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Om

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

är andra egenvektor som hör till λ_2, då koordinaterna x, y uppfyller ekvationen

$$x - 2y = 0$$

vilket ger

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Normalisering ger $t = 1/\sqrt{5}$ och vi får

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Överföringsmatrisen P blir alltså

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

5. Insättningen av punkternas koordinater i linjens ekvation ger oss systemet för obekanta k och b som skall lösas i minstakvadratmening:

$$\begin{cases} -k + b = 0 \\ 0 \cdot k + b = 1 \\ k + b = 2 \\ 2k + b = 1 \end{cases}$$

Samma system i matrisform har utseendet

$$A \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{c},$$

där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt minstakvadratmetoden skall man lösa normalsystemet

$$A^T A \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = A^T \mathbf{c}.$$

Vi räknar

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vilket ger oss normalsystemet

$$\begin{cases} 6k + 2b = 4 \\ 2k + 4b = 4. \end{cases}$$

Det löses t ex med Kramers regler och vi får svar

$$k = 2/5; \quad b = 4/5.$$

6. Man skall undersöka samband $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$ som är ett homogent system för obekanta c_1, c_2, c_3 med matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Efter standarda radoperationer överförs matrisen till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 15-5b \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

Vi avgör att $15 - 5b$ skall vara 0 eftersom annars systemet har endast triviala lösningar. Detta ger oss $b = 3$ och matrisen av systemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den tredje raden gånger 2 adderas till den andra och vi får matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu ser vi att om $a - 2 \neq 0$ då har systemet endast triviala lösningar vilket ger oss $a = 2$. För sådana värdena av a och b systemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och den har oändligt många lösningar d v s det finns icke-triviala koefficienter c_1, c_2, c_3 sådana att $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 = 0$ och vektorerna blir linjärt beroende.

Svar: $a = 2$, $b = 3$.

7. Matrisen till kvadratiska formen är

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi söker dess egenvärdena. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \quad [\text{andra raden adderas till den tredje}] \quad =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \quad [\text{utveckling längs sista raden} \quad]\, (4-\lambda) \left(- \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4).$$

Vi får egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ samt $\lambda_3 = 1$. Alla egenvärdena är positiva vilket visar att den kvadratiska formen är positivt definit.

8. Låt P_2 beteckna vektorrummet av polynom av grad högst. Vi utrustar P_2 med basen

$$B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\} = \{1, x, x^2\}$$

samt den inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in P_2.$$

Betrakta den linjära avbildningen $T : P_2 \to P_2$ som ges av

$$T(p) = (x+1)\frac{d}{dx}p, \quad p \in P_2.$$

Bestäm matrisen för avbildningen T relativt basen B. Är avbildningen T inverterbar? Är T en isometri, det vill säga en normbevarande avbildning, med avseende på normen som ges av den inre produkten på P_2?

Lösning Vi bestämmer först bilden av basvektorerna i B under avbildningen. Vi har

$$T(1) = (x+1) \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{b_1} + 0 \cdot \mathbf{b_2} + 0 \cdot \mathbf{b_3},$$

$$T(x) = (x+1) \cdot 1 = x + 1 = 1 \cdot \mathbf{b_1} + 1 \cdot \mathbf{b_2} + 0 \cdot \mathbf{b_3},$$

$$T(x^2) = (x+1) \cdot 2x = 2x + 2x^2 = 0 \cdot \mathbf{b_1} + 2 \cdot \mathbf{b_2} + 2 \cdot \mathbf{b_3}.$$

Matrisen för avbildningen i basen B ges av

$$T_B = \left(T(\mathbf{b_1})|T(\mathbf{b_2})|T(\mathbf{b_3})\right),$$

det vill säga,

$$T_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avbildningen är inte inverterbar eftersom alla polynom av grad 0 (det vill säga alla konstantpolynom) avbildas på 0. Avbildningen T är inte heller en isometri. Vi har

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2 \, dx = 1$$

medan

$$\|T(1)\|^2 = \int_0^1 0 \; dx = 0,$$

så $\|p\| = \|T(p)\|$ gäller inte för alla $p \in P_2$.