Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin, Alan Sola

SF1624, Algebra och geometri
SF1653, Webbaserad kurs i linjär algebra
Tentamen, måndagen den 7 januari 2009 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 14 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 17p för D, 20p för C, 23p för B samt 25p för A. Den som får 13p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs fyra lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla lappskrivningar befrias från uppgifter 1-4 och får 12p). För studenter på M ersätter inlämningsuppgiften uppgift 3.

L Y C K A   T I L L !

(3p) **1.** Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$z^4 + iz^3 + 2z^2 = 0.$$

(3p) **2.** Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna

$$p_1 = (1, 2, -1), \quad p_2 = (2, 3, 1) \quad \text{och} \quad p_3 = (3, -1, 2).$$

Avgör därefter om linjen l som på parameterform har utseendet

$$l : (1, 0, 0) + t(1, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R},$$

skär detta plan. Bestäm skärningen om så är fallet.

(3p) **3.** Bestäm de reella talen a och b för vilka matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

är en ortogonal matris (ON-matris) för varje θ.

Ge för varje sådant par a och b en geometrisk tolkning av den linjära avbildningen som hör till ON-matrisen.

(3p) **4.** Diagonalisera ortogonalt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d v s ange en ON matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^T$.

(4p) **5.** Ange den räta linjen $y = kx + b$ som i minstakvadratmening ansluter så nära som möjligt till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$.

(4p) **6.** För vilka värden på konstanterna a och b är de tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ b \\ 11 \end{pmatrix}$$

linjärt beroende?

(4p) **7.** Visa att den kvadratiska formen

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$$

är positivt definit.

(4p) **8.** Låt P_2 beteckna vektorrummet av polynom av grad högst 2. Vi utrustar P_2 med basen

$$B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\} = \{1, x, x^2\}$$

samt den inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in P_2.$$

Betrakta den linjära avbildningen $T : P_2 \to P_2$ som ges av

$$T(p) = (x+1)\,\frac{d}{dx}\,p, \quad p \in P_2.$$

Bestäm matrisen för avbildningen T relativt basen B. Är avbildningen T inverterbar? Är T en isometri, det vill säga en normbevarande avbildning, med avseende på normen som ges av den inre produkten på P_2?