Lösningar till tentamen i kurs SF1624 Algebra och geometri 090313.

3-poängsuppgifter

1. Division med $z-i$ ger faktorn $z^2+(1-2i)z+1+5i$. Vi söker nollställena :

   Kvadratkomplettering ger $(z+\frac{1}{2}(1-2i))^2=-\frac{7}{4}-6i$.

   Låt $z+\frac{1}{2}(1-2i)=w=x+iy$ (1). Detta ger systemet $\begin{cases} x^2-y^2=-\frac{7}{4} & (2) \\ 2xy=-6 & (3) \\ x^2+y^2=|w^2|=\frac{25}{4} & (4) \end{cases}$

   $(2)+(4)\Rightarrow 2x^2=\frac{18}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$ $\quad (4)-(2)\Rightarrow 2y^2=\frac{32}{4}\Rightarrow y=\pm 2$. (3) ger att x och y

   har olika tecken dvs $w_1=\frac{3}{2}-2i$, $w_2=-\frac{3}{2}+2i)$. (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1=1-i \\ z_2=-2+3i \end{cases}$

2. Skärningspunkten mellan den givna linjen och planet fås:

   $-3+2t+2(-3+t)-(-1-t)=2\Rightarrow t=2$. Det ger skärningspunkten (1,-1,-3). Den

   sökta linjen är ortogonal mot den givna linjens riktningsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och mot

   planets normalvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Som riktningsvektor för den sökta linjen kan vi då ta

   vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Den sökta linjen ges då av

   $\begin{cases} x=\ \ 1+\ t \\ y=-1+\ t \\ z=-3+3t \end{cases}$

3. Mängden duger som bas om och endast om följande determinant är skild från 0:

   $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+1\neq 0$ för alla reella a. $S_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Vi söker koefficienter a, b, c så att $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \ \ 2 \\ c = \ \ 1 \end{cases}$$

4. $\bar{v}$ är en egenvektor till matrisen A om $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ där λ är en skalär.

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att alla utom vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till matrisen. Vi ser också att egenvärdena är 1, 2 och 3. Då dessa är olika är matrisen diagonaliserbar.

4-poängsuppgifter

5. $$\begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1+3a & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-a^2) & 1+a & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & -2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att för a = -1,1 är koefficientmatrisens determinant noll och entydig lösning kan ej erhållas. Vi får tre fall:

$a \neq \pm 1$: $z = -\dfrac{2}{1+a}$, $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+3a}{1+a}$ dvs entydig lösning

$a = 1$: $z = -1$, $y = t \Rightarrow x = 2 - 2t$, $-\infty < t < +\infty$ dvs oändligt många lösningar

$a = -1$: Sista ekvationen ger 0 = -2 dvs lösning saknas.

6. A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk. Det ger a = 2. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A. Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,1,10.$$

Egenvektorerna söks:

$$\lambda=10:\begin{bmatrix}-5&4&2&0\\4&-5&2&0\\2&2&-8&0\end{bmatrix}\to\ldots\to\begin{bmatrix}1&1&-4&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2t\\x_2=2t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow\bar{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}t\ .$$

$$\lambda=1:\begin{bmatrix}4&4&2&0\\4&4&2&0\\2&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-s-\frac{t}{2}\\x_2=\ s\\x_3=\ \ t\end{cases}\Rightarrow\bar{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}t\ .$$

Alla vektorer i det plan som spänns av de två vektorerna är egenvektorer med egenvärde 1 .

Vi får en vektor i detta plan som är ortogonal mot $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ om vi bildar kryssprodukten med en egenvektor ur det ortogonala egenrummet med $\lambda=10$:

$$\begin{vmatrix}\bar{e}_x&\bar{e}_y&\bar{e}_z\\2&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Som de två första kolumnerna i matrisen P kan vi då välja $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ och $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

Det ger matrisen $P=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-3&-1&2\sqrt{2}\\3&-1&2\sqrt{2}\\0&4&\sqrt{2}\end{bmatrix}$. Motsvarande diagonalmatris är

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}.$$

7. Låt $P(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}=1-\frac{1}{n^2}$. $P(2):VL=\frac{3}{4}=HL$ dvs $P(2)$ är sann.

Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n+1$:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}+\frac{2(n+1)-1}{(n+1-1)^2(n+1)^2}=\{induktionsantagande\}=$$

$$=1-\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1+\frac{2n+1-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}\ .$$

Då är $P(n)$ sant för $n\ge 2$ enligt induktionsprincipen.

8. Vi använder att kolumnerna i en operators standardmatris ges av operatorns verkan på standardbasvektorerna. Om T har invers fås direkt att

$$\overline{u} = T^{-1}T(\overline{u}) = T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \overline{v} = T^{-1}T(\overline{v}) = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \overline{w} = T^{-1}T(\overline{w}) = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$ Det

betyder att de sökta vektorerna är kolumnerna i operatorns inversmatris. Då inversen är entydig kan det inte finnas fler sådana vektorer. Det återstår att visa att T har invers. Vi söker operatorns standardmatris:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Det ger standardmatrisen $\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\3 & -5 & 1\\3 & -2 & 0\end{bmatrix}$. Inversen till denna är $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\3 & -3 & 1\\9 & -2 & -4\end{bmatrix}$.

De sökta vektorerna är alltså $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\9\end{pmatrix}$, $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$.