KTH Matematik

Tentamen i kurs SF1624 Algebra och geometri.
Fredagen den 13 mars 2009 kl 0800-1300.

Tentamen består av fyra 3-poängsuppgifter och fyra 4-poängsuppgifter.
För godkänt betyg (E) krävs minst 14 poäng. För de högre betygen D, C, B och A gäller betygsgränserna 17, 20, 23 resp 25 poäng.
Du som uppnår 13 poäng erhåller betyg Fx och kommer att erbjudas en kompletteringstentamen. Kontakta då den kursansvarige läraren för vidare information.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,3,4) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

3-poängsuppgifter

1. Ekvationen $z^3+(1-3i)z^2-(1-4i)z+5-i=0$ har en rot $z=i$. Bestäm ekvationens samtliga rötter. Ledning: $\sqrt{625}=25$.

2. Bestäm den räta linje i planet $x+2y-z=2$ som skär linjen
$$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-3+\ t \\ z=-1-\ t \end{cases}$$ under rät vinkel.

3. Låt $S_a=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$. Visa att denna mängd vektorer duger som bas i $\mathbf{R}^3$ för alla värden på det reella talet a. Bestäm också koordinaterna för vektorn $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ i basen S_1.

4. Avgör vilka av vektorerna $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ som är egenvektorer till matrisen
$\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$. Är matrisen diagonaliserbar? Motivera!

VGV

4-poängsuppgifter

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + (a^2+1)y + \quad az = 1 \\ x + \quad 2y + \quad az = 1 \\ 2x + \quad 4y + (1+3a)z = 0 \end{cases}$$

för alla värden på det reella talet a .

6. Bestäm den reella konstanten a så att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & a \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

blir diagonaliserbar med hjälp av en ON-matris. Bestäm även en ON-matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

7. Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ för $n \geq 2$.

8. För den linjära operatorn T på $\mathbf{R}^3$ gäller att

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ och $\overline{w}$ sådana att

$$T(\overline{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; T(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } T(\overline{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm i så fall alla sådana vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ och $\overline{w}$.