Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2009-06-03, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)
Göran och Karim

1. (=2. för CSMAH1) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{1}{5}.$$

1.(Endast för CSAMH1).
Bevis
Bassteg Kolla att påstående är sant för $n = 1$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2 \Leftrightarrow 2\cdot 1 - 1 = 1 \quad \text{. Alltså sant}$$

Induktionssteg. Vi antar att påstående är sant för $n = p$ dvs $\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2$.

Vi vill visa att det måsta vara sant för $n = p+1$,dvs $\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = (p+1)^2$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{p}(2k-1) + (2(p+1)-1) = p^2 + (2(p+1)-1) = p^2 + 2p + 2 - 1 = (p+1)^2$$

Eftersom vi har visat att påståendet gäller för bassteget *n=1* samt att antagandet att påståendet gäller för *n=p* medför att det också gäller för *n=p+1*, följer det från **induktionsprincipen** att påståendet gäller för varje heltal *n=1,2,3,...*

2. (Ej för CSAMH1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) r_3 - r_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) r_1 - 2r_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) r_2 - 2r_3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) r_1 \times r_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) r_2 + r_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) r_1 - 2r_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow z = t,\ y = -1 - 2t,\ x = 3 + 2t$$

$\boxed{\textbf{Svar: } x = 3 + 2t,\ y = -1 - 2t,\ z = t.}$

---

3. a) Vi undersöker om det finns konstanter a och b sådana att $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.
$a(1,-1,1,1) + b(1,2,1,2) = (5,1,5,7) \Leftrightarrow (a + b, -a + 2b, a + b, a + 2b) = (5,1,5,7) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 5 & \\ -a + 2b = 1 & e_2 + e_1 \\ a + b = 5 & e_3 - e_1 \\ a + 2b = 7 & e_4 - e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3b = 6 \\ 0 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3,\ b = 2.$$

$\boxed{\textbf{Svar}\text{: ja.}}$

b) Enligt a) kan de två vektorer skrivas som en linjärkombination av den tredje. Detta innebär att de tre vektorer är linjärberoende, dvs svaret är Nej

---

4. Ekvationen kan skrivas på formen

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^t A \vec{x} = 1$$

där $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Den karakteristiska ekvationen $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$

dvs $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ ger två positiva egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 6$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips.

Axelriktningar = riktningar hos A:s egenvektorer. Dessa fås ur $(A - \lambda I)$v = 0.

För $\lambda_2 = 6$ har vi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} = 0$ och en lösning är tex v = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

För $\lambda_1 = 1$ får man tex u = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Genom en vridning kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $x^2 + 6y^2 = 1$ vars halvaxellängder är 1och $1/\sqrt{6}$.

5. $z = i$ är en rot till ekvationen ger $i^3 + (2-i)i^2 + (1-10i)i + a = 0 \Rightarrow a = -8 - i$.

Divisionen av $z^3 + (2-i)z^2 + (1-10i)z - 8 - i$ med $z - i$ ger $z^2 + 2z + 1 - 8i$. Återstår att lösa ekvationen $z^2 + 2z + 1 - 8i = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 8i$. Sätt $z + 1 = x + yi$.

Man får:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 8i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \text{ och } x = y \text{ som ger } x = y = \pm 2$$

$\boxed{\textbf{Svar: } i, -3-2i, 1+2i.}$

6. $B^{-1}XA = -B^{-1}X + 2I \Leftrightarrow B^{-1}X(A+I) = 2I \Leftrightarrow B^{-1}X = 2(A+I)^{-1}$

$$\Leftrightarrow X = 2B(A+I)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Svar: $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

7. En punkt i planet är t ex $P_0 = (3,0,0)$. Då är $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Med $\vec{n}$ som normalvektor till det givna planet så ger det projektionsformeln då att

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Alltså är } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den sökta triangelns area blir därför

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

8. Eftersom *A har 3* skilda egenvärden, är *A diagonaliserbar* och kan skrivas

$A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Då är

$$A + I = PDP^{-1} + PP^{-1} = P\left(D + I\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\det\left(A + I\right) = \det\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}\right) = \det\left(PP^{-1}\right)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \neq 0$$

Detta betyder att $A+I$ är inverterbar.