KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Fredagen den 23 oktober, 2009

DEL A

(1) (a) Bestäm de övriga rötterna till ekvationen

$$z^3 - 11z^2 + 43z - 65 = 0$$

när det är känt att en av rötterna är $3 - 2i$. **(3)**

(b) Förklara varför de komplexa rötterna till en tredjegradsekvation med reella koefficienter förekommer i konjugerade par. **(1)**

Lösning. a) Eftersom koefficienterna till ekvationen är reella måste rötterna förkomma i konjugerade par (se del b)). Det betyder att även $z = 3 + 2i$ är en rot och vi måste kunna dela ekvationen med

$$(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = (z - 3)^2 + 4 = z^2 - 6z + 13.$$

När vi utför denna polynomdivision får vi

$$z^3 - 11z^2 + 43z - 65 = (z - 5)(z^2 - 6z + 13),$$

vilket visar att $z = 5$ är den tredje roten till ekvationen.

b) Om vi konjugerar hela ekvationen

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

får vi

$$a\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 + c\bar{z} + d = 0$$

eftersom a, b, c, d är reella och därmed $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$ och $\bar{d} = d$. Alltså är $\bar{z}_0$ också en rot till ekvationen om z_0 är det och alla komplexa rötter måste förekomma i par med sitt konjugat. Vi kan enligt faktorsatsen dela med den reella faktorn

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$$

och får då ett reellt polynom av grad 1 som alltså måste ha en reell rot.

□

Svar:

a) De övriga rötterna är $z = 3 - 2i$ och $z = 5$.

(2) (a) Avgör för vilka värden på parametern t som de tre vektorerna

$$(1-t,0,1,1), \quad (2,6-t,0,2) \quad \text{och} \quad (1,4,1,3)$$

är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^4$. **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. **(1)**

Lösning. a) För att avgöra när de tre vektorerna är linjärt oberoende söker vi efter nollskilda lösningar till ekvationssystemet

$$x\begin{pmatrix}1-t\\0\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\6-t\\0\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Vi kan beräkna determinanten till koefficientmatrisen för de tre nedersta raderna och får då

$$\begin{vmatrix}0 & 6-t & 4\\1 & 0 & 1\\1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}6-t & 4\\2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6-t & 4\\0 & 1\end{vmatrix}$$
$$= -(6-t)\cdot 3+2\cdot 4+(6-t)\cdot 1-0=2t-4$$

där vi först utvecklade determinanten efter första kolonnen. Den enda möjligheten till nollskilda lösningar är därmed $t=2$ och om vi sätter in $t=2$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases}-x & +2y & +z & =0\\ & 4y & +4z & =0\\ x & & +z & =0\\ x & +2y & +3z & =0\end{cases}$$

När vi nu använder Gausselimination på detta system får vi

$$\begin{cases}-x & +2y & +z & =0\\ & 4y & +4z & =0\\ & +2y & +2z & =0\\ & +4y & +4z & =0\end{cases} \iff \begin{cases}x & -2y & -z & =0\\ & y & +z & =0\end{cases}$$

vilket har lösningarna $(x,y,z)=s(-1,-1,1)$, för $s\in\mathbf{R}$. Alltså är de tre vektorerna linjärt oberoende precis om $t\neq 2$.

b) Tre vektorer, $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om den enda linjärkombination av dem som blir nollvektorn är $0\cdot\overline{u}+0\cdot\overline{v}+0\cdot\overline{w}$, dvs om

$$a\cdot\overline{u}+b\cdot\overline{v}+c\cdot\overline{w}=0 \quad\Longrightarrow (a,b,c)=(0,0,0).$$

$\square$

Svar:

a) De tre vektorerna $(1-t,0,1,1)$, $(2,6-t,0,2)$ och $(1,4,1,3)$ är linjärt oberoende om och endast om $t\neq 2$.

(3) Använd linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(0, 1, -2)$ och punkten $(0, 1, 1)$ för att visa hur man med hjälp av projektion finner den punkt på en given linje som ligger närmast en given punkt. **(4)**

Lösning. Vi betecknar den givna punkten med P och låter Q vara en punkt på linjen. Om R är den punkt på linjen som ligger närmast P så kommer vektorn $\overline{PR}$ att vara vinkelrät mot linjen. Det betyder att vektorn $\overline{QR}$ är projektionen av $\overline{QP}$ på linjen.

I vårt fall kan vi välja $Q = (2, 1, -1)$ som en punkt på den givna linjen och $P = (0, 1, 1)$ är den givna punkten. Vi får alltså

$$\overline{QP} = (0, 1, 1) - (2, 1, -1) = (-2, 0, 2)$$

och vi får projektionen på linjen, som har riktningsvektor $\overline{v} = (0, 1, -2)$ genom

$$\overline{QR} = \mathrm{Proj}_{\overline{v}}\, \overline{QP} = \frac{(-2, 0, 2) \cdot (0, 1, -2)}{(0, 1, -2) \cdot (0, 1, -2)}(0, 1, -2) = \frac{-4}{5}(0, 1, -2)$$

och därmed får vi den sökta punkten R genom

$$R = Q + \overline{QR} = (2, 1, -1) - \frac{4}{5}(0, 1, -2) = (2, 1/5, 3/5) = \frac{1}{5}(10, 1, 3).$$

$\square$

Svar: Den punkt på linjen som ligger närmast den givna punkten är $(2, 1/5, 3/5)$.

(4) Vid lösningen av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 1, \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5, \end{cases}$$

kommer man genom Gausselimination fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right).$$

(a) Skriv upp den matris som hör till det givna systemet och utför de radoperationer som krävs för att få den på trappform. **(1)**

(b) Ange lösningsmängden till ekvationssystemet. **(2)**

(c) Tillhör punkten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 12, 4, -9)$ lösningsmängden? **(1)**

Lösning. a) Vi skriver först upp totalmatrisen för systemet med ett vertikalt streck för att indikera vad som är till vänster, respektive till höger om likhetstecknet.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Vi använder sedan den ledande ettan från första raden för at eliminera i kolonn ett och får då

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & 14 & -9 \end{array}\right).$$

Vi multiplicerar sedan andra raden med -1 och använder den ledande ettan för att eliminera i andra kolonnen. Vi får då

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right).$$

Därmed har matrisen hamnat på trappstegsform.

b) För att finna lösningsmängden är det lättast att använda den färdigreducerade matrisen som angivits i problemet. Det är en kolonn som saknar ledande etta och vi introducerar därför en parameter för motsvarande variabel. De variabler som har ledande ettor i sina kolonner kan därmed lösas ut och vi får

$$\begin{cases} x_1 & = -8, \\ x_2 & = 9 + t, \\ x_3 & = t, \\ x_4 & = -9. \end{cases}$$

c) Vi kan kontrollera om det är en lösning genom att sätta in i det ursprungliga systemet, eller i det eliminerade systemet. Sätter vi in det i det senare får vi

$$\begin{cases} x_1 &= -8 \\ x_2 - x_3 &= 12 - 4 = 8 \neq 9 \\ x_4 &= -9 \end{cases}$$

och vi ser att det inte är en lösning eftersom den andra ekvationen inte är uppfylld.

$\square$

Svar:

b) Lösningsmängden består av alla $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 9+t, t, -9)$, där t är en reell parameter.

c) Nej, $(-8, 12, 4, -9)$ tillhör inte lösningsmängden.

(5) (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Förklara varför alla egenvärden till en kvadratisk matris, A, måste uppfylla den *karaktäristiska ekvationen*[1], $\det(A - \lambda I) = 0$. **(1)**

Lösning. a) Vi börjar med att bestämma egenvärdena till matrisen. Det kan vi göra genom att lösa den karaktäristiska ekvationen, $\det(A - \lambda I) = 0$. I vårt fall får vi

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

och därmed är den karaktäristiska ekvationen

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

som genom kvadratkomplettering är ekvivalent med

$$(\lambda - 2)^2 = 9 \iff \lambda = 2 \pm 3.$$

Alltså är egenvärdena -1 och 5. För att hitta egenvektorerna löser vi ekvationssystemen $(A - \lambda I)x = 0$, vilket i matrisform är

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \text{och} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

I båda fallen kan vi genom en enda radoperation få matriserna på trappstegsform och läsa av lösningarna som $t(1, -1)$, respektive $t(1, 2)$.

b) En egenvektor är en nollskild lösning till $Ax = \lambda x$. Vi kan skriva om detta till det homogena systemet

$$(A - \lambda I)x = 0$$

vilket har nollskilda lösningar om och endast om determinanten till koefficientmatrisen är noll, dvs om och endast om λ är en lösning till den karaktäristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

□

Svar:

a) Egenvärdena är -1 och 5 och motsvarande egenvektorer är nollskilda multipler av $(1, -1)$ och $(1, 2)$.

[1] också kallad *sekularekvationen* och skrivs ibland $\det(\lambda I - A) = 0$

(6) (a) Förklara vad som menas med att en avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ är linjär. **(1)**

(b) Bestäm matrisen med avseende på standardbasen för den linjära avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(3)

Lösning. a) En avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ är linjär om det för alla $\overline{u}$ och $\overline{v}$ i $\mathbf{R}^3$ gäller att

$$T(\overline{u}+\overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$$

och för alla $\overline{u}$ i $\mathbf{R}^3$ och alla reella λ gäller att

$$T(\lambda\overline{u}) = \lambda T(\overline{u}),$$

dvs att T respekterar addition och multiplikation med skalär.

b) Vi kan formular problemet som att vi söker den matris A som uppfyller

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi kan invertera 3×3-matrisen genom Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Vi kan nu multiplicera med inversen till höger och får

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

b) Matrisen för avbildningen med avseende på standardbasen är

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

DEL B

(7) Vi har två baser i $\mathbf{R}^3$ givna av

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

och känner till att en basbytesmatris mellan baserna ges av

$$T = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Det är ofta svårt att komma ihåg åt vilket håll basbytet går. Red ut detta genom att använda matrisen ovan för att bestämma koordinaterna relativt basen F för den vektor som har koordinaterna (a, b, c) relativt basen G. **(2)**

(b) Bestäm matrisen för det omvända basbytet. **(2)**

Lösning. a) Vi kan prova åt vilket håll basbytesmatrisen fungerar genom att ta de första basvektorerna i de två baserna. Dessa har koordinaterna $(1, 0, 0)$ relativt den egna basen och basbytesmatrisen överför denna vektor till

$$T = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Som koordinater relativt basen F svarar detta mot

$$0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

medan det i basen G svarar mot

$$0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\5\\5\end{pmatrix}.$$

Alltså omvandlar matrisen koordinater från basen G till koordinater i basen F. Vi kan därmed ta vektorn som har koordinaterna (a, b, c) relativt basen G och få koordinaterna relativt basen F genom att multiplicera med den givna basbytesmatrisen till vänster:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b + c\\a + 2c\\2a + b\end{pmatrix}$$

b) Vi kan få det omvända basbytet genom att invertera den givna basbytesmatrisen. Detta kan vi göra exempelvis genom Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right)$$

Alltså ges det omvända basbytet av matrisen

$$T^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

a) Basbytesmatrisen T omvandlar koordinater relativt basen G till koordinater relativt basen F.

b) Basbytesmatrisen för det omvända basbytet ges av

$$T^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Förklara varför egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris måste vara ortogonala mot varandra. **(2)**

(b) Bestäm en symmetrisk matris med egenvärdena -1 och 4 och där $(4,-3)$ en egenvektor till det första egenvärdet. **(2)**

Lösning. a) Om u och v är egenvektorer som hör till olika egenvärden, λ och μ, kan vi beräkna u^tAv och v^tAu på två olika sätt:

$$u^tAv = u^t\mu v = \mu u\cdot v$$

men samtigt har vi

$$u^tAv = (u^tAv)^t = v^tA^tu = v^tAu = v^t\lambda u = \lambda v^tu = \lambda v\cdot u,$$

där vi använt att $A^t = A$ för en symetrisk matris A. Eftersom $u\cdot v = v\cdot u$ får vi en motsägelse om $u\cdot v\neq 0$ och $\lambda\neq\mu$. Alltså måste $u\cdot v = 0$ om $\lambda\neq\mu$.

b) Eftersom vi söker en symmetrisk matris och egenvärdena är olika måste egenvektorerna vara ortogonala. Därmed måste egenvektorn till det andra egenvärdet vara $t(3,4)$. Vi kan nu skriva upp en ortogonal matris med hjälp av dessa egenvektorer efter att vi har normaliserat dem. Eftersom $|(4,-3)| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5 = |(3,4)|$ får vi

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

Om A är en symmetrisk matris med dessa ortonala egenvektorer har vi nu att $P^{-1}AP = P^tAP = D$, där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen. Vi kan lösa ut A som

$$\begin{aligned} A &= PDP^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 12 & 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20 & 60\\ 60 & 55\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 12\\ 12 & 11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Svar:

b) En symmetrisk matris med egenvärden -1 och 4 och egenvektor $(4,-3)$ med egenvärde -1 ges av $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 12\\ 12 & 11\end{pmatrix}$

(9) Enligt en modell för en elektrisk krets uppfyller strömmen $i(t)$ uppmätt vid jämna tidsintervall en rekursionsekvation

$$i_{n+2} = ai_{n+1} + bi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där a och b är konstanter. Vid en mätning har man mätt upp strömmens värde vid ett antal tidpunkter och har därmed mätdata i en vektor $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$. Beskriv hur man kan använda minsta-kvadratmetoden för att finna de värden på konstanterna a och b som bäst stämmer överens med mätningarna. Illustrera metoden genom att utföra den i fallet då vi har fem mätvärden $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (1, 2, 2, 1, 0)$ mA. **(4)**

Lösning. Rekursionsekvationen består egentligen av ett antal linjära ekvationer. Vi kan betrakta dem som linjära ekvationer i konstanterna a och b om vi har givna värden på $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Därmed kan vi skriva upp tre ekvationer:

$$\begin{cases} bi_1 & +ai_2 & = i_3 \\ bi_2 & +ai_3 & = i_4 \\ bi_3 & +ai_4 & = i_5 \end{cases}$$

Dessa linjära ekvationer är i allmänhet linjärt oberoende och det saknas lösningar. Däremot kan vi använda minsta-kvadratmetoden för att hitta värden som ligger så nära en lösning som möjligt.

För att hitta en sådan lösning behöver vi att skilnaden mellan högerledet och vänsteledet är ortogonalt mot det rum som spänns upp av kolonnerna i koefficientmatrisen. Detta villkor kan vi skriva som $A^t(Ax - B) = 0$, dvs vi vill lösa ekvationssystemet $A^tAx = A^tB$. I vårt fall har vi att

$$A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_2 & {}_3 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Därmed får vi att normalekvationen ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Med Gausselimination, eller med Cramers regel kan vi lösa ekvationssystemet och får

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}. = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -12 & 22 \end{pmatrix}$$

□

Svar: De konstanter som passar bäst med de givna mätdata i minsta-kvadratmening är $a = 22/17 \approx 1,29$ och $b = -12/17 \approx -0,71$.

(10) Spåret av en kvadratisk matris A ges av summan av diagonalelementen och betecknas med $\operatorname{tr} A$. Låt $\{a_n\}$ vara talföljden som definieras genom

$$a_n = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n, \qquad \text{för alla heltal } n \geq 1.$$

Visa att följden uppfyller den linjära rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$$

för alla heltal $n \geq 1$, exempelvis genom att använda att $A^2 = 4A + 5I$. **(4)**

Lösning. Vi kan se att spåret är en linjär avbildning från rummet av 2×2-matriser till $\mathbf{R}$, eftersom

$$\operatorname{tr}(B + C) = b_{1,1} + b_{2,2} + c_{1,1} + c_{2,2} = \operatorname{tr} B + trC$$

och

$$\operatorname{tr}(\lambda B) = \lambda b_{1,1} + \lambda b_{2,2} = \lambda \operatorname{tr} B.$$

Därmed får vi att

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n &= \operatorname{tr} A^{n+2} - 4 \operatorname{tr} A^{n+1} - 5 \operatorname{tr} A^n \\ &= \operatorname{tr}(A^{n+2} - 4A^{n+1} - 5A^n) \\ &= \operatorname{tr}(A^n(A^2 - 4A - 5I)) = 0, \end{aligned}$$

eftersom

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□