KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Tisdagen den 15 december, 2009

DEL A

(1) (a) Bestäm de komplexa koefficienterna a, b och c så att polynomet
$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$
har nollställena $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - i$ och $z_3 = -i$. **(3)**

(b) Går det att ändra på ett av nollställena så att alla koefficienter blir reella? **(1)**

Lösning. a) Enligt faktorsatsen ska polynomet kunna skrivas som
$$P(z) = \lambda(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$
för någon konstant λ. Eftersom koefficienten för z^3 är 1 måste vi ha $\lambda = 1$. Vi kan nu räkna ut $P(z)$ genom att multiplicera ihop de tre faktorerna $(z-z_1) = (z-1+i)$, $(z - z_2) = (z - 2 + i)$ och $(z - z_3) = (z + i)$. Vi får
$$\begin{aligned}(z - 1 + i)(z - 2 + i) &= z^2 - z + iz - 2z + 2 - 2i + iz - i - 1 \\ &= z^2 - (3 - 2i)z + 1 - 3i\end{aligned}$$
och
$$\begin{aligned}&(z - 1 + i)(z - 2 + i)(z + i) \\ &= (z^2 - (3 - 2i)z + 1 - 3i)(z + i) \\ &= z^3 - (3 - 2i)z^2 + (1 - 3i)z + iz^2 - i(3 - 2i)z + i(1 - 3i) \\ &= z^3 + (-3 + 3i)z^2 + (-1 - 6i)z + 3 + i.\end{aligned}$$
Alltså får vi att koefficienterna ska vara $a = -3 + 3i$, $b = -1 - 6i$ och $c = 3 + i$

b) Om koefficienterna är reella förekommer komplexa nollställen i konjugerade par. Ingen av de tre nollställena är konjugatet av någon av de andra och därför kan vi inte få alla koefficienter att bli reella genom att bara ändra på ett av nollställena.

□

Svar:

a) Koefficienterna är $a = -3$, $b = 5 + 3i$ och $c = -6 - 2i$.

b) Nej, det går inte eftersom nollställena inte är parvis konjugerade.

(2) *Enhetskuben* i $\mathbb{R}^3$ är den kub med volym ett som spänns upp av de tre standardbasvektorerna. Den linjära avbildningen T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Förklara varför T avbildar ett linjestycke i $\mathbb{R}^3$ på ett linjestycke i $\mathbb{R}^2$. **(1)**
(b) Rita upp bilden av enhetskuben i $\mathbb{R}^3$ under avbildningen T. **(3)**

Lösning. a) Eftersom avbildningen är linjär gäller att $T(a\overline{u} + b\overline{v}) = aT(\overline{u}) + bT(\overline{v})$, för skalärer a, b och vektorer $\overline{u}, \overline{v}$. Om vi har linjestycket mellan punkterna P och Q kan vi skriva ortsvektorerna för punkterna på detta linjestycke som

$$\overline{OP} + t\overline{PQ}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Eftersom $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$ blir detta $(1-t)\overline{OP} + t\overline{OQ}$ och när vi använder T på dessa vektorer får vi

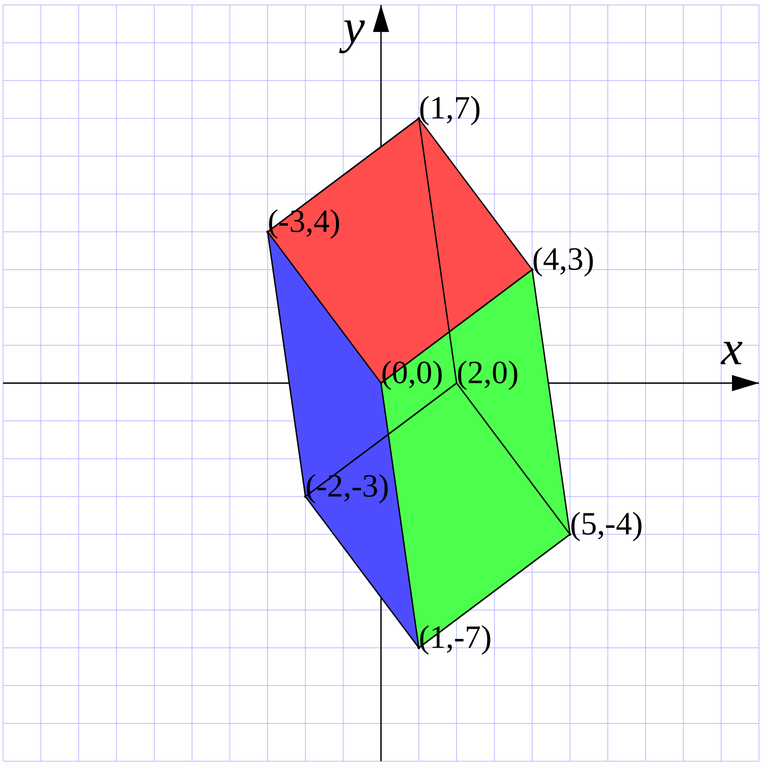
$$T((1-t)\overline{OP} + t\overline{OQ}) = (1-t)T(\overline{OP}) + tT(\overline{OQ})$$

vilket är linjestycket mellan $T(\overline{OP})$ och $T(\overline{OQ})$.

b) När vi nu ska rita ut bilden av enhetskuben kan vi börja med att räkna ut bilderna av hörnen. Vi kan räkna ut alla det för alla åtta hörnen samtidigt med hjälp av matrismultitplikation:

$$\begin{aligned} & T\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 7 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan nu rita ut dessa åtta punkter i ett koordinatsystem och dra linjestyckena mellan dem. Det område som innesluts av dessa linjer måste vara bilden av kuben under avbildningen T. De sex kvadratiska sidorna avbildas på sex parallellogram. De tre sätten att välja ut två av kolonnerna i matrisen ger tre parallellogram som tillsammans precis täcker hela bilden i det här fallet.


y
x
(1,7)
(-3,4)
(4,3)
(0,0)
(2,0)
(-2,-3)
(5,-4)
(1,-7)

□

(3) (a) Förklara varför man kan beräkna inversmatrisen till en kvadratisk matris A genom att utföra Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $(A|I)$, där I är identitetsmatrisen av samma storlek som A. **(1)**

(b) Visa hur detta går till i praktiken genom att beräkna inversen, A^{-1}, till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

och kontrollera att $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. **(3)**

Lösning. a) Varje radoperation motsvarar multiplikation av totalmatrisen med en elementär matris till vänster. Sammantaget ger alla radoperationer i Gauss-Jordaneliminationen en multiplikation med en matris B så att $AB = I$. Därmed måste B vara inversmatrisen till A och i högerledethar vi nu fått $BI = B$.
Vi kan också se det som att vi löser matrisekvationen $AX = I$, genom att ha multipla högerled. Vi har därmed koefficentmatris A och högerled I, och lösningen som ges av Gausselimination ges av $X = A^{-1}$.

b)

$$\begin{aligned}
A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \end{bmatrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{3}r_2 \\ r_3 + \frac{4}{3}r_2 \end{bmatrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - 3r_3 \\ r_2 + r_3 \\ 3r_3 \end{bmatrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 - r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollerar att

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-5) & 1\cdot(-6) + 2\cdot 1 + 1\cdot 4 & 1\cdot(-5) + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 8 + 1\cdot(-1) + 3\cdot(-5) & 2\cdot(-6) + 1\cdot 1 + 3\cdot 4 & 2\cdot(-5) + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ -1\cdot 8 + 2\cdot(-1) - 2\cdot(-5) & -1\cdot(-6) + 2\cdot 1 - 2\cdot 4 & -1\cdot(-5) + 2\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och att

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8\cdot 1 - 6\cdot 2 - 5\cdot(-1) & 8\cdot 2 - 6\cdot 1 - 5\cdot 2 & 8\cdot 1 - 6\cdot 3 - 5\cdot(-2) \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & -1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot(-2) \\ -5\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot(-1) & -5\cdot 2 + 4\cdot 1 + 3\cdot 2 & -5\cdot 1 + 4\cdot 3 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Svar:

b) Inversen ges av $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(4) Använd induktion för att visa att

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$$

för alla positiva heltal n. **(4)**

Lösning. Basfallet ges av $n = 1$, eftersom $n = 1$ är det minsta positiva heltalet. Vi har då att vänsterledet är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

och högerledet är

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ -1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alltså är vänsterled och högerled lika och påståendet gäller för $n = 1$.

Antag nu att påstående gäller för $n = k$, för något positivt heltal k. Vi vill nu visa att det också gäller för $n = k + 1$. Enligt antagandet har vi att

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1-k & k \\ -k & k+1 \end{pmatrix}$$

Därmed får vi att vänsterledet för $n = k + 1$ är

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^k \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-k & k \\ -k & k+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\cdot(1-k)+1\cdot(-k) & 0\cdot k+1\cdot(k+1) \\ -1\cdot(1-k)+2\cdot(-k) & -1\cdot k+2\cdot(k+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k & k+1 \\ -k-1 & k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(k+1) & k+1 \\ -(k+1) & (k+1)+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

vilket är lika med högerledet för $n = k+1$. Vi har visat att antagandet att påståendet gäller för $n = k$ leder till att påståendet också gäller för $n = k + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller därför påståendet för alla heltaln $n \geq 1$, dvs för alla positiva heltal n. $\square$

(5) (a) Förklara vad det innebär att en kvadratisk matris går att diagonalisera. **(1)**

(b) Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

går att diagonalisera. **(3)**

Lösning. a) Att det går att diagonalisera A betyder att det finns en basbytesmatris P så att $P^{-1}AP$ blir en diagonalmatris. Det innebär också att det finns en bas för $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A om A är en $n \times n$-matris.

b) För att avgöra om det går att diagonalisera A behöver vi se om det finns en bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till A. Vi söker efter egenvektorer genom att först lösa den karaktäristiska ekvationen: $\det(A - xI) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - xI) &= \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= -x(2-x) - 1 \cdot (-1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2. \end{aligned}$$

Därmed är $x = 1$ den enda lösningen till den karaktäristiska ekvationen. Vi söker egenvektorer till egenvärdet 1 genom Gausselimination på totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Alltså ges samtliga egenvektorer av $t(1,1)^t$, där $t \neq 0$. Det finns därmed inte två linjärt oberoende egenvektorer till A, som därmed inte går att diagonalisera.

□

Svar:

b) Det går inte att diagonalisera A eftersom det inte finns två linjärt oberoende egenvektorer.

(6) Beskriv hur man kan bestämma ekvationen för det plan i rummet som innehåller en given linje och en given punkt utanför linjen. Ge ett belysande exempel genom att utföra detta med punkten $(1, 1, 0)$ och linjen $(x, y, z) = (3, 0, -1) + t(0, 2, 1)$, där t är en reell parameter. **(4)**

Lösning. För att finna ekvationen för planet behöver vi finna en normalvektor till planet. För att göra detta kan vi använda kryssprodukten mellan två vektorer som ligger i planet. Riktningsvektorn, $\overline{v}$, till linjen ligger i planet liksom vektorn mellan punkten P och en punkt Q på linjen. För att få en sådan vektor, $\overline{PQ}$, kan vi ta skillnaden mellan ortsvektorerna för punkten P och punkten Q. Alltså kan vi beräkna normalvektorn som $\overline{n} = \overline{v} \times \overline{PQ}$ och får ekvationen för planet genom

$$((x, y, z)^t - \overline{OP}) \cdot \overline{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z)^t \cdot \overline{n} = \overline{OP} \cdot n.$$

I det konkreta exemplet har vi $\overline{v} = (0, 2, 1)^t$ och för att finna punkten Q på linjen kan vi välja $t = 0$ och får $Q = (3, 0, -1)$. Vektorn $\overline{PQ}$ får som

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (3, 0, -1)^t - (1, 1, 0)^t = (2, -1, -1)^t.$$

Vi får normalen genom vektorprodukten

$$\begin{aligned} \overline{n} &= (0, 2, 1)^t \times (2, -1, -1)^t \\ &= (2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1), 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)^t \\ &= (-1, 2, -4)^t. \end{aligned}$$

Vi vet nu att ekvationen kan skrivas som $\overline{n} \cdot (x, y, z)^t = d$ för någon konstant $d = \overline{n} \cdot \overline{OP} = (-1, 2, -4)^t \cdot (1, 1, 0)^t = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = 1$.

Alltså ges ekvationen för planet av $-x + 2y - 4z = 1$. $\square$

Svar: Planets ekvation är $-x + 2y - 4z = 1$. (Eller någon nollskild multipel av denna)

Var god vänd!

DEL B

(7) Bestäm basbyten i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ som gör att den linjära avbildningen T, som har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

med avseende på standardbaserna, får matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

med avseende på de nya baserna. Ange båda basbytesmatriserna och var noggrann med att ange åt vilket håll basbytena går. **(4)**

Lösning. Till att börja med ser vi att den tredje basvektorn i den nya basen för $\mathbb{R}^3$ ska gå på noll. Vi behöver alltså lösa ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{4} & \frac{18}{4} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Vi får alltså lösningarna $(x, y, z) = t(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, 1)$. Vi kan därmed välja $\overline{f}_3 = (-7, 6, 5)$ som den tredje basvektorn för $\mathbb{R}^3$. Eftersom bilden av de två första standardbasvektorerna är linjärt oberoende kan vi låta $\overline{f}_1 = (1, 0, 0)^t$ och $f_2 = (0, 1, 0)^t$. Vi har nu en bas för $\mathbb{R}^3$ så att matrisen blir

$${}_EA_F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Om vi dessutom väljer bilderna av $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ som basvektorer $\overline{g}_1$ och $\overline{g}_2$ i $\mathbb{R}^2$ blir matrisen den sökta, dvs

$${}_GA_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De basbytesmatriser som används är nu

$${}_EP_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {}_EP_G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Om vi inverterar den senare får vi

$${}_GP_E = ({}_EP_G)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

och vi kan kontrollera att

$${}_GA_F = ({}_GP_E)({}_EA_E)({}_EP_F) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(8) Egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris är automatiskt ortogonala mot varandra. Använd detta för att finna en ortonormal bas av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 6 & -3 \\ 15 & 4 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -2 & 12 \\ -3 & -3 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

där $\overline{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\overline{u}_2 = (0,0,1,2)^t$, $\overline{u}_3 = (1,0,-2,1)^t$ och $\overline{u}_4 = (-1,1,0,0)^t$ är fyra linjärt oberoende egenvektorer till A. **(4)**

Lösning. Vi börjar med att se vilka egenvärden de olika egenvektorerna har:

$$\begin{pmatrix} 4 & 15 & 6 & -3 \\ 15 & 4 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -2 & 12 \\ -3 & -3 & 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 0 & -11 & 11 \\ 22 & 0 & 0 & -11 \\ 22 & 22 & 22 & 0 \\ 22 & 44 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ egenvektorer med egenvärde 22, meda $\overline{u}_3$ och u_4 är egenvektorer med egenvärde -11.

Därmed är de två första egenvektorerna automatiskt ortogonala mot de bägge andra och det räckera att byta ut $\overline{u}_2$ mot $a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$ som är ortonal mot $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_4$ mot $c\overline{u}_3 + d\overline{u}_4$ som är ortogonal mot $\overline{u}_3$.

$$(a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2) \cdot \overline{u}_1 = 0 \iff a\overline{u}_1 \cdot \overline{u}_1 + b\overline{u}_2 \cdot \overline{u}_1 = 0 \iff 4a + 3b = 0.$$

Vi kan välja $a = 3$ och $b = -4$ och får

$$\overline{u}'_2 == 3(1,1,1,1)^t - 4(0,0,1,2)^t = (3,3,-1,-5).$$

På samma sätt kan vi få att

$$(c\overline{u}_3 + d\overline{u}_4) \cdot \overline{u}_3 = 0 \iff c\overline{u}_3 \cdot \overline{u}_3 + d\overline{u}_4 \cdot \overline{u}_3 = 0 \iff 6c - d = 0.$$

och vi kan välja $d = 6$ och $c = 1$. Då får vi

$$\overline{u}'_4 = (1,0,-2,1)^t - 6(-1,1,0,0)^t = (-5,-6,-2,1)^t.$$

Vi har nu en ortogonal bas av egenvektorer, men behöver normera för att få en ortonormal bas. Vi får då

$$\begin{aligned}
\overline{v}_1 &= \tfrac{1}{|\overline{u}_1|}\overline{u}_1 = \tfrac{1}{1+1+1+1} = \tfrac{1}{4}(1,1,1,1)^t \\
\overline{v}_2 &= \tfrac{1}{|\overline{u}'_2|}\overline{u}'_2 = \tfrac{1}{9+9+1+25}(3,3,-1,-5)^t = \tfrac{1}{44}(3,3,-1,-5)^t \\
\overline{v}_3 &= \tfrac{1}{|\overline{u}_3|}\overline{u}_3 = \tfrac{1}{1+4+1}(1,0,-2,1)^t = \tfrac{1}{6}(1,0,-2,1)^t \\
\overline{v}_4 &= \tfrac{1}{|\overline{u}'_4|}\overline{u}'_4 = \tfrac{1}{25+36+4+1}(-5,6,-2,1)^t = \tfrac{1}{66}(-5,6,-2,1)^t
\end{aligned}$$

vilket utgör en ortonormal bas av egenvektorer. □

(9) En *ellips* i planet med centrum i origo kan ses som en nivåkurva till en kvadratisk form, dvs lösningarna till ekvationen $Q(x,y) = k$ för någon kvadratisk form $Q(x,y)$ och någon konstant k. Om vi efter ett ortogonalt koordinatbyte skriver ellipsens ekvation på den *kanoniska* formen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a \geq b > 0$, kommer den att som bredast vara $2a$ i *storaxelriktningen* och som smalast $2b$ i *lillaxelriktningen*.

(a) Bestäm ekvationen för den ellips som har $a = 5\sqrt{2}$ och $b = 5$ och som har storaxelrikningen $(1,7)$. **(3)**

(b) Avgör om punkten $(0,7)$ ligger utanför eller innanför denna ellips. **(1)**

Lösning. a) Vi vill till att börja med finna den kvadratiska formen som har egenvärden $1/a^2$ och $1/b^2$, dvs $1/50$ och $1/25$. Egenriktningen som hör till det mindre egenvärdet, $1/a^2$, är $(1,7)$, och eftersom egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala får vi den andra riktningen till $(7,-1)$. Vi kan ställa upp det ortogonala basbytet som

$$P = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

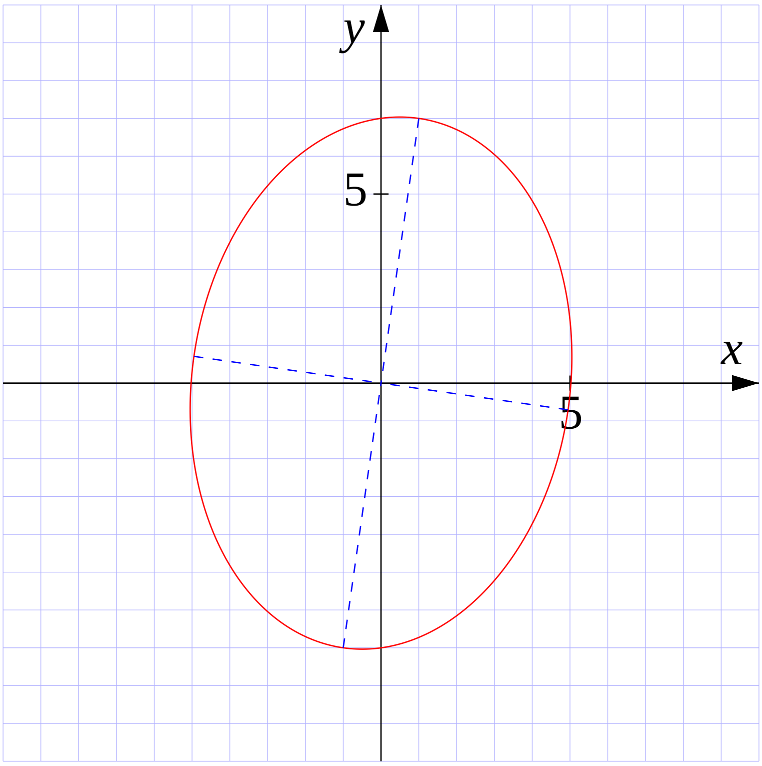
eftersom de båda vektorerna $(1,7)$ och $(7,-1)$ båda har längd $\sqrt{7^2+1} = \sqrt{50}$. Vi kan nu få matrisen för den kvadratiska formen med dessa egenvärden och egenvektorer som

$$\begin{aligned} A &= PDP^t = \tfrac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{50^2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{50^2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{50^2} \begin{pmatrix} 99 & -7 \\ -7 & 51 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan därmed skriva ekvationen för ellipsen som

$$99x^2 - 14xy + 51y^2 = 2500$$

i de ursprungliga koordinaterna.



b) För att avgöra om punkten $(0, 7)$ ligger i eller utanför ellipsen ser vi på värdet av den kvadratiska formen:

$$99 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 \cdot 7 + 51 \cdot 7^2 = 51 \cdot 49 = 50^2 - 1 = 2499$$

Den kvadratiska formens värden växer för större (x, y) och därmed måste $(0, 7)$ ligga inuti ellipsen eftersom $2499 < 2500$.

$\square$

Svar:

a) Ekvationen för ellipsen är $99x^2 - 14xy + 51y^2 = 2500$.

b) Punkten $(0, 7)$ ligger inuti ellipsen.

(10) I tillämpningar inom statistik förekommer *stokastiska matriser*. Det är kvadratiska matriser där elementen i matrisen är sannolikheter och därför ligger i intervallet $[0, 1]$ och där summan av elementen i varje kolonn är lika med 1.

(a) Visa att produkten av två stokastiska matriser av samma storlek också är en stokastisk matris. **(2)**

(b) Visa att varje stokastisk matris har ett egenvärde som är 1. **(2)**

Lösning. a) Att summan av kolonnelementen är ett betyder att vektorn $\overline{v} = (1, 1, \ldots, 1)^t$ uppfyller

$$\overline{v}^t A = \overline{v}^t$$

för en stokastisk matris A. Om nu också B är en stokastisk matris är

$$\overline{v}^t AB = \overline{v}^t B = \overline{v}^t$$

vilket visar att kolonnsummorna är ett även i AB. Eftersom både A och B bara har icke-negativa element kommer AB också att vara icke-negativ. Om summan av ett antal icke-negativa tal ska vara ett måste alla talen ligga i intervallet $[0, 1]$. Alltså är produkten av två stokastiska matriser också en stokastisk matris.

b) Låt A vara en stokastisk matris. Vi såg i del (a) att $\overline{v}^t A = \overline{v}^t$. Om vi transponerar detta får vi att $A^t \overline{v} = \overline{v}$, dvs $\overline{v}$ är en egenvektor med egenvärde 1 till A^t. Eftersom $\det(A^t - xI) = \det(A - xI)$ har A och A^t samma karaktäristiska ekvation och därmed samma egenvärden. Eftersom 1 är ett egenvärde till A^t är det också ett egenvärde till A, vilket skulle visas.

$\square$