KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Måndagen den 11 januari, 2010

DEL A

(1) (a) Visa hur man kan använda polär form av komplexa tal för att beräkna potenser genom att beräkna $(1 - i\sqrt{3})^7$ och skriva svaret på rektangulär form. **(3)**

(b) Ange en polynomekvation med reella koefficienter som har $1 - i\sqrt{3}$ som en rot. **(1)**

Lösning. a) Vi beräknar först belopp och argument för $z = 1 - i\sqrt{3}$. Beloppet ges av $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1 - i\sqrt{})(1 + i\sqrt{3}) = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$, dvs $|z| = 2$.
För argumentet, ϕ, kan vi se på $z/|z| = \cos\phi + i\sin\phi$ och jämföra real- och imaginärdelar, vilket ger att

$$\cos\phi = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

och därmed är $\phi = -\pi/3$. Vi får nu att

$$z^7 = |z|^7(\cos 7\phi + i\sin 7\phi) = 2^7(\cos\frac{7\pi}{3} - i\sin\frac{7\pi}{3}) = 128(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}) = 64 - 64i\sqrt{3}.$$

b) En polynonmekvation, $P(z) = 0$, med reella koefficienter som har $1 - i\sqrt{3}$ som en rot har också konjugatet $1 + i\sqrt{3}$ som en rot. Därmed finns $(z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3}) = (z-1)^2 - (i\sqrt{3})^2 = z^2 - 2z + 1 + 3 = z^2 - 2z + 4$ med som en faktor i $P(z)$. Ett exempel på en sådan ekvation är alltså $z^2 - 2z + 4 = 0$.
Andra exempel kan fås genom att se på den polära formen ovan där vi ser att $z^6 = 2^6 = 64$, eller att $z^3 = 2^3(-1) = -8$.

□

Svar:

a) $(1 - i\sqrt{3})^7 = 64 - 64\sqrt{3}i$.

b) Ekvationen $z^2 - 2z + 4 = 0$ har $1 - i\sqrt{3}$ som en rot.

(2) (a) Använd Gauss-Jordans metod för att bestämma lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$$

(3)

(b) Bestäm villkoret på a, b och c för att det ska finnas lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = b, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = c. \end{cases}$$

(1)

Lösning. a) Vi använder Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen för systemet, dvs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -9 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 - \frac{3}{2}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{4}r_2 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har två fria variabler eftersom det saknas ledande etta i andra och fjärde kolonnen. För dessa variabler får vi införa parametrar, $x_2 = s$ och $x_4 = t$. Sedan kan vi använda första ekvationen för att lösa ut x_1 och

$$x_1 = 3 - 2x_2 + 2x_4 = 3 - 2s + 2t$$

och den andra ekvationen för att lösa ut x_3 som

$$x_3 = -2 - 3x_4 = -2 - 3t.$$

Alltså ges lösningsmängden av

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -2, 0) + s(-2, 1, 0, 0) + t(2, 0, -3, 1)$$

där s och t är reella parametrar.

b) För att se vilka högerled som fungerar behöver vi utföra samma radoperationer på $(a, b, c)^t$. Det finns lösingar till systemet precis då den tredje raden blir helt noll när vänsterledet blir noll.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 - \frac{3}{2}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ b - \frac{3}{2}a \\ c - \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{4}r_2 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{4}b + \frac{3}{8}a \\ c + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{4}b + \frac{3}{8}a \\ c + \frac{1}{2}b - \frac{5}{4}a \end{pmatrix}$$

Villkoret för att det ska finnas lösningar är alltså att

$$c + \frac{1}{2}b - \frac{5}{4}a = 0,$$

vilket också kan skrivas som att

$$5a - 2b - 4c = 0.$$

$\square$

Svar:

a) Lösningsmängden ges av $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -2, 0) + s(-2, 1, 0, 0) + t(2, 0, -3, 1)$, där s och t är reella parametrar.

b) Villkoret för att det ska finnas lösningar ges av $5a - 2b - 4c = 0$.

(3) (a) Ge exempel, med motivering, på två linjer i rummet som inte skär varandra men som heller inte är parallella. **(1)**

(b) Visa hur man kan finna en ekvation för det plan som innehåller två givna parallella linjer genom at utföra detta med linjerna $(x, y, z) = (3, -5, 1) + t(2, -2, 4)$ och $(x, y, z) = (1, 3, 1) + t(-1, 1, -2)$, där t är en reell parameter. **(3)**

Lösning. a) Vi behöver välja två icke-parallella riktningsvektorer, tex $\overline{u} = \overline{e}_x$ och $\overline{v} = \overline{e}_y$. Sedan behöver vi se till att de inte ligger i samma plan. Det kan vi göra genom att exempelvis förskjuta dem i förhållande till varandra utefter den riktning som är vinkelrät mot båda, i det här fallet $\overline{e}_z$. Om den första går genom origo kan vi låta den andra gå genom $(0, 0, 1)$. Vi får då linjerna

$$(x, y, z) = t(1, 0, 0) \quad \text{och} \quad (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(0, 1, 0).$$

Dessa kan inte skära varandra eftersom den ena ligger helt i planet $z = 0$ och den andra helt i planet $z = 1$.

b) För att finna normalvektorn till planet kan vi använda kryssprodukten mellan två vektorer i planet. Den ena kan vi välja som riktningsvektorn till någon av linjerna och den andra som en vektor från en punkt på den ena linjen till en punkt på den andra.

En möjlig riktningsvektor ges av $\overline{v} = (1, -1, 2)$ och en vektor mellan linjerna ges av

$$\overline{u} = (3, -5, 1)^t - (1, 3, 1)^t = (2, -8, 0)^t.$$

Vi får en normalvektor till planet som

$$\begin{aligned} \overline{u} \times \overline{v} &= (2, -8, 0) \times (1, -1, 2) \\ &= (-8 \cdot 2 - 0 \cdot (-1), 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot (-1) - (-8) \cdot 1)^t \\ &= (-16, -4, 6)^t. \end{aligned}$$

Ekvationen för planet kan vi få som $-16x - 4y + 6z = d$, för någon konstant d. Vi får d genom att sätta in en punkt som ligger i planet, tex $(1, 3, 1)$.

$$d = -16 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = -22.$$

Alltså blir ekvationen för planet

$$-16x - 4y + 6z = -22,$$

eller

$$8x + 2y - 3z = 11$$

om vi delar med -2.

□

Svar:

a) Linjerna $(x, y, z) = t(1, 0, 0)$ och $(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(0, 1, 0)$ skär inte varandra och är inte parallella.

b) En ekvation för planet är $8x + 2y - 3z = 11$.

(4) (a) Förklara varför determinanten av transponatet av en matris är lika med determinanten av matrisen. **(1)**
(b) Använd detta till att visa att determinanten av en ortogonal matris måste vara 1 eller -1 . **(2)**
(c) Ge exempel på en ortogonal 2×2-matris med determinant 1 och en med determinant -1. **(1)**

Lösning. a) Varje matris kan skrivas som en produkt av elementära matriser. De elementära matriserna är antingen symmetriska eller har determinant 1. När vi transponerar en matris ingår samma elementära matriser i produkten, men nu transponerade. Eftersom determinanten för dessa inte ändras och ordningen inte spelar någon roll får vi att

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \det((E_1E_2\cdots E_m)^t) = \det(E_m^t\cdots E_2^tE_1^t)\\ &= \det(E_m^t)\cdots\det(E_2^t)\det(E_1^t) = \det(E_m)\cdots\det(E_2)\det(E_1)\\ &= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m) = \det(E_1E_2\cdots E_m) = \det(A).\end{aligned}$$

Ett annat sätt att se att determinanten inte ändras när vi transponerar är genom att se på formeln för determinanten som

$$\det(A) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

där summan tas över alla $n!$ permutationer σ. Om vi transponerar matrisen innan vi beräknar determinanten får vi samma produkter i summan men vi behöver kontrollera att de får samma tecken. För att göra det räcker det att se på matriser som har precis en etta i varje kolonn och precis en etta i varje rad. (Sådana matriser kallas permutationsmatriser.) Tecknet av en term i summan motsvarar determinanten av motsvarande permutationsmatris. Permutationsmatriserna är ortogonala och därmed uppfyllller de $\det(AA^t) = \det(I) = 1$, varför de måste ha samma tecken på determinanten som sina transponat. Därmed får alla termer samma tecken när vi räknar ut $\det(A)$ som när vi räknar ut $\det(A^t)$.
Genom att använda kofaktorutveckling av determinanten kan vi också se det genom induktion över storleken av matrisen. När vi utvecklar $\det(A)$ efter första raden får vi samma sak som när vi utvecklar $\det(A^t)$ efter första kolonnen.

b) En matris A är ortogonal om $A^tA = I$, men eftersom $\det(A^t) = \det(A)$ får vi då att

$$1 = \det(I) = \det(A^tA) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$$

där vi använt att determinanten bevarar multiplikation. Därmed har vi att $\det(A)^2 = 1$ för en ortogonal matris, och därmed måste $\det(A) = \pm 1$, vilket skulle visas.

c) Identitetsmatrisen är en ortogonal matris med determinant 1. Om vi byter tecken på något av diagonalelementen är den fortfarande ortogonal, men determinanten ändras till -1. Vi kan också skriva upp alla ortogonala 2×2-matriser som rotationer

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

eller speglingar

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

där rotationerna har determinant 1 och speglingarna har determinant -1.

$\square$

Svar:

c) Exempelvis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) Låt $\overline{v}$ vara en given vektor i $\mathbb{R}^3$ och definiera med vektorprodukten $T(\overline{u}) = \overline{u} \times \overline{v}$, för alla $\overline{u}$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Visa att T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. **(1)**

(b) Bestäm standardmatrisen för T om den givna vektorn är $\overline{v} = (a, b, c)^t$. **(3)**

Lösning. a) För att visa att T är linjär behöver vi kontrollera att

$$T(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) = T(\overline{u}_1) + T(\overline{u}_2)$$

för alla vektorer $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ och att

$$T(a\overline{u}) = aT(\overline{u})$$

för alla vektorer $\overline{u}$ och alla reella tal a.
I vårt fall har vi att

$$T(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) = (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \times \overline{v} = \overline{u}_1 \times \overline{v} + \overline{u}_2 \times \overline{v} = T(\overline{u}_1) + T(\overline{u}_2)$$

och

$$T(a\overline{u}) = (a\overline{u}) \times \overline{v} = a(\overline{u} \times \overline{v}) = aT(\overline{u})$$

där vi har använt egenskaperna hos vektorprodukten.

b) För att bestämma standardmatrisen för avbildningen kan vi se vad en gör med standardbasvektorerna. Vi har att

$$\begin{aligned} \overline{e}_x \times \overline{v} &= (1,0,0)^t \times (a,b,c)^t \\ &= (0\cdot c - 0\cdot b, 0\cdot a - 1\cdot c, 1\cdot b - 0\cdot a)^t = (0,-c,b)^t, \\ \overline{e}_y \times \overline{v} &= (0,1,0)^t \times (a,b,c)^t \\ &= (1\cdot c - 0\cdot b, 0\cdot a - 0\cdot c, 0\cdot b - 1\cdot a)^t = (c,0,-a)^t, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \overline{e}_z \times \overline{v} &= (0,0,1)^t \times (a,b,c)^t \\ &= (0\cdot c - 1\cdot b, 1\cdot a - 0\cdot c, 0\cdot b - 0\cdot a)^t = (-b,a,0)^t. \end{aligned}$$

Dessa tre vektorer utgör nu kolonnerna i standardmatrisen för T som är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

b) Standardmatrisen för T ges av $A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

(6) (a) Förklara vad som menas med att en kvadratisk form är positivt definit. **(1)**

(b) Avgör om den kvadratiska formen

$$Q(x,y) = 9x^2 + 20xy + 11y^2$$

är positivt definit. **(3)**

Lösning. a) Att en kvadratisk form Q på $\mathbb{R}^n$ är positivt definit betyder att $Q(\overline{x}) \geq 0$ för alla $\overline{x}$ i $\mathbb{R}^n$, med likhet bara när $\overline{x} = 0$.

b) Vi kan avgöra om Q är positivt definit genom att se på dess egenvärden. Efter en diagonalisering kan vi skriva den kvadratiska formen som

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

och vi ser att den är positivt definit precis om båda egenvärdena är positiva. Matrisen för Q ges av

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

och den karaktäristiska ekvationen är $\det(A - \lambda I) = 0$, dvs

$$\det \begin{pmatrix} 9-x & 10 \\ 10 & 11-x \end{pmatrix} = 0 \iff (9-\lambda)(11-\lambda) - 10^2 = 0$$
$$\iff \lambda^2 - 20\lambda + 99 - 100 = 0 \iff \lambda^2 - 20\lambda - 1 = 0.$$

Vi kan lösa den genom kvadratkomplettering och får

$$(\lambda - 10)^2 - 100 = 1 \iff (\lambda - 10)^2 = 101 \iff \lambda = 10 \pm \sqrt{101}.$$

Den mindre av dessa rötter är negativ eftersom $10 = \sqrt{100} < \sqrt{101}$. Alltså är Q inte positivt definit.

Det går också att se att Q inte kan vara positivt definit genom att se på determinanten av A som är lika med produkten av egenvärdena. Eftersom determinanten är -1 som är negativ kan inte bägge egenvärdena vara positiva.

□

Svar:

b) Q är inte positivt definit.

Var god vänd!

DEL B

(7) Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

har en egenvektor som är $(1, -1, 0)^t$. Använd detta för att diagonalisera A. **(4)**

Lösning. Eftersom $(1, -1, 0$ är en egenvektor kan vi finna motsvarande egenvärde genom att multiplicera med A. Vi får

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är motsvarande egenvärde 2. De övriga egenvärdena kan vi få från den karaktäristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} + (-2) \det \begin{pmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 2) - 2((-1) \cdot 2 - 2 \cdot (1-\lambda)) \\
&= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 - 4) - 2(2\lambda - 4) \\
&= \lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda - 2 - 4\lambda + 8 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6
\end{aligned}$$

Eftersom vi vet att $\lambda = 2$ är ett nollställe får vi att $\lambda - 2$ är en faktor och genom polynomdivision får vi

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

Vi kan faktorisera den andra faktorn genom kvadratkomplettering:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 - 4 + 3 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 1 \iff \lambda = 2 \pm 1$$

vilket ger $P(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)$. Vi har redan egenvektor till egenvärdet $\lambda = 2$ och vill nu finna egenvektorer till de två andra egenvärdena. Vi använder Gausselimination på matrisen $(A - I|0)$ och får

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Med $x_3 = t$ får vi $x_2 = -3t$ och $x_1 = 2t$ och egenvektorerna ges av $t(2, -3, 1)$, för $t \neq 0$.

För $\lambda = 3$ använder vi Gausselimination på matrisen $(A - 3I|0)$ och får

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Med $x_3 = t$ får vi nu $x_2 = 2t$ och $x_1 = -2t$ och egenvektorerna är $t(-2, 2, 1)$ för $t \neq 0$.

Vi kan nu diagonalisera A med hjälp av basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

där kolonnerna består av egenvektorer med egenvärden 2, 1 och 3. Vi får på så sätt att

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Svar: Basbytesmatrisen $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ digonaliserar A genom $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(8) Visa med hjälp av vektorkalkyl att de tre linjerna mellan hörnen i en triangel ABC och mittpunkterna på motstående sidor skär varandra i punkten med ortsvektor

$$\frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC},$$

där O är koordinatsystemets origo. Illustrera med belysande figurer. **(4)**

Lösning. Vi kan först hitta uttryck för ortsvektorerna till mittpunkterna på sidorna. Låt A' vara mittpunkten på sidan som står mitt emot A, B' vara mittpunkten på sidan mitt emot B och C' vara mittpunkten på sidan mitt emot C.

Vi kan nå A' genom att först gå till B och sedan halvvägs till C från B, dvs

$$\overline{OA'} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} - \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC}$$

På motsvarande sätt får vi $\overline{OB'} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OC}$ och $\overline{OC'} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$.

Låt P vara den givna punkten med ortsvektor

$$\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}.$$

Vi kan gå från A till P och får då

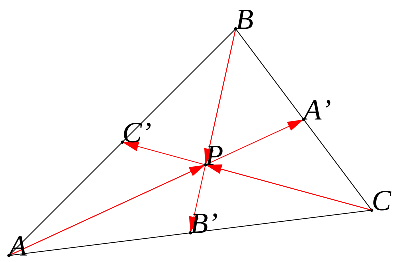
$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{OP} - \overline{OA} = \tfrac{1}{3}\overline{OA} + \tfrac{1}{3}\overline{OB} + \tfrac{1}{3}\overline{OC} - \overline{OA}\\ &= -\tfrac{2}{3}\overline{OA} + \tfrac{1}{3}\overline{OB} + \tfrac{1}{3}\overline{OC}\\ &= \tfrac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} - 2\overline{OA}).\end{aligned}$$

Om vi går från A till A' får vi

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC} - 2\overline{OA}).$$

Därmed är $\overline{AP}$ och $\overline{AA'}$ parallella, vilket visar att P ligger på linjen mellan A och A'.

Av symmetri kommer samma räkningar att ge att P också ligger på linjen mellan B och B' och på linjen mellan C och C'. Därmed skär de tre linjerna varandra i punkten P.



□

(9) På rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ inför vi skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Använd Gram-Schmidts metod för att bestämma en ortogonal bas för underrummet[1] av polynomfunktioner av grad högst två. **(4)**

Lösning. Låt f_1, f_2 och f_3 vara polynomfunktionerna som ges av $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ och $f_3(x) = x^2$.

Vi kan nu beräkna skalärprodukten av f_1 och f_2 som

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

vilket visar att f_2 och f_1 redan är ortogonala. Vi kan därmed låta $g_1 = f_1$ och $g_2 = f_2$. För att få en ortogonal bas behöver vi nu använda Gram-Schmidts metod för att ersätta f_3 med en funktion g_3 som är ortogonal mot g_1 och g_2.

Vi beräknar

$$\langle g_1, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\langle g_2, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0,$$

och

$$|g_1|^2 = \langle g_1, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2.$$

Vi får g_3 genom att subtrahera projektionerna av f_3 på g_1 och g_2 från f_3, dvs

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle g_1, f_3\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle g_2, f_3\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 = f_3 - \frac{2/3}{2} g_1 - 0 \cdot g_2 = f_3 - \frac{1}{3} g_1.$$

Alltså ges g_3 av $g_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. $\square$

Svar: En ortogonal bas ges av $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ och $g_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

[1]Underrum kallas också *delrum*

(10) Rummet av $n \times n$-matriser bildar ett vektorrum. Visa att mängden av matriser B som *kommuterar* med en given matris A, dvs uppfyller $AB = BA$, bildar ett underrum och bestäm en bas för detta underrum i fallet då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4)

Lösning. Låt V vara delmängden av matriser som kommuterar med en given matris A. För att se att V är ett underrum behöver vi kontrollera att det är slutet under addition och multiplikation med skalär. Antag att B och C kommuterar med A. Vi har då att

$$AB = BA \quad \text{och} \quad AC = CA$$

och vi får att

$$A(B + C) = AB + AC = BA + CA = (B + C)A$$

vilket visar att också $B + C$ kommuterar med A och V är slutet under addition. Låt nu a vara ett godtyckligt reellt tal. Vi får att

$$A(aB) = aAB = aBA = (aB)A$$

vilket visar att aB också kommuterar med A och V är slutet under multiplikation med skalär. Därmed är V ett underrum till rummet av $n \times n$-matriser.

Vi vill nu finna en bas för V i fallet då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Om vi ansätter

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

får vi att

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 4x_1 + 3x_3 & 4x_2 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

och

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 & 2x_1 + 3x_2 \\ x_3 + 4x_4 & 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Därmed får vi att

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_3 & -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 \\ 4x_1 + 2x_3 - 4x_4 & 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Alltså motsvarar $AB - BA = 0$ det homogena systemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Med Gausselimination kan vi reducera detta till

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Om vi inför parametrar $x_3 = 2s$ och $x_4 = t$ får vi $x_2 = s$ och $x_1 = t - s$ och därmed ges lösningen av

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(-1, 1, 2, 0) + t(1, 0, 0, 1)$$

vilket i matrisnotationen skrivs

$$B = s\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså utgör matriserna $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en bas för underrummet av matriser som kommuterar med A.

Vi kan också se att A och I ligger i detta underrum. Eftersom dessa är linjärt oberoende bildar de också en bas. $\square$

Svar: En bas för underrummet ges av exempelvis A och I.