KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Lördagen den 17 april, 2010

Skrivtid: 09.00-14.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivningen i Kurs-PM.[1] Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

[1]Observera att endast löpande examination från period 3 kan tillgodoräknas vid denna tentamen. (Period 2 och 3 för CINEK)

DEL A

(1) Visa med induktion att
$$\sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n+1},$$
för alla heltal $n \geq 2$. **(4)**

(2) Betrakta ekvationssystemet med totalmatris
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 4+t \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & 4-t \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$
där t är en reell parameter.

(a) Red ut för vilka värden på parametern t som systemet har en unik lösning, ingen lösning, eller oändligt många lösningar. **(3)**

(b) Förklara varför det inte kan finnas något ytterligare alternativ till antalet lösningar till systemet. **(1)**

(3) En triangel i rummet har hörn i punkterna $A = (-2,-2,-1)$, $B = (2,1,-1)$ och $C = (-1,1,3)$. Använd skalärprodukten för att avgöra om vinkeln vid hörnet B är större än eller mindre än $60°$. **(4)**

(4) (a) Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter och låt a vara ett reellt tal. Visa att $p(a)$ är resten vid polynomdivision av $p(x)$ med $x-a$. **(2)**

(b) Den symmetriska matrisen A har karaktäristisk ekvation $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Bestäm samtliga egenvärden till A om det är känt att det finns en vektor $\overline{v} \neq 0$ sådan att $A\overline{v} = 2\overline{v}$. **(2)**

(5) (a) Härled formeln för projektion av en vektor $\overline{v}$ på en nollskild vektor $\overline{u}$ genom att använda egenskapen att $\overline{v} - \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är vinkelrät mot $\overline{u}$ och att $\mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är parallell med $\overline{u}$. **(1)**

(b) Använd formeln för projektionen från del a) till att bestämma den punkt på linjen genom origo med riktningsvektor $(1,2,-1)$ som har kortast avstånd till punkten $P = (2,0,1)$. **(3)**

(6) (a) Förklara varför determinanten av en basbytesmatris inte kan vara noll. **(1)**

(b) Bestäm basbytesmatrisen från basen $F = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$ till basen $G = \{(1,0,-1),(1,-1,0),(1,1,1)\}$. Använd sedan basbytesmatrisen för att beräkna koordinaterna relativt basen G för den vektor som har koordinaterna $(2,1,0)$ relativt basen F. **(3)**

DEL B

(7) Låt T vara en spegling av planet i linjen $x = y$ och låt S vara en spegling av planet i linjen $x = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen A för sammansättningen ST. **(2)**

(b) Bestäm minsta positiva heltal n sådant att A^n är identitetsmatrisen. **(1)**

(c) Ge en geometrisk tolkning av sammansättningen ST. **(1)**

(8) Symmetriska matriser är som bekant alltid diagonaliserbara, men det är annorlunda med *antisymmetriska* matriser, dvs matriser som uppfyller $A^t = -A$.

(a) Visa att en antisymmetrisk 2×2-matris bara är diagonaliserbar om den är nollmatrisen. **(1)**

(b) Visa att samma sak gäller även för antisymmetriska 3×3-matriser. **(3)**

(9) Låt V vara vektorrummet av polynom av grad högst två, dvs

$$V = \{p(x) \mid p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Definiera

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

för $p(x), q(x) \in V$.

(a) Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ är en inre produkt på V. **(1)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att bilda en ortogonal bas för V utgående från basen $E = \{1, x, x^2\}$. **(3)**

(10) (a) Låt A och B vara godtyckliga kvadratiska matriser av samma storlek och λ en skalär. Visa att $BA = \lambda A$ om och endast om A:s kolonnvektorer ligger i nollrummet till matrisen $B - \lambda I$. **(2)**

(b) Antag nu att

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Låt V vara vektorrummet av alla 2×2 matriser och låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildning som ges av $T(A) = BA$. Visa att 2 är ett egenvärde för T och bestäm en bas för motsvarande egenrum. **(2)**