KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredagen den 22 oktober, 2010

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1, 2010. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innbär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Uttrycket

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 3, 0) + t(0, 5, 1)$$

definierar ett plan W i rummet där s och t är reella parametrar.

(a) Bestäm en normalvektor till planet med hjälp av kryssprodukten av de bägge riktningsvektorerna $(1, 3, 0)$ och $(0, 5, 1)$. **(1)**

(b) Bestäm en ekvation för planet W på formen $ax + by + cz + d = 0$. **(2)**

(c) Bestäm det kortaste avståndet från planet W till origo, exempelvis genom att projicera vektorn från origo till punkten $(1, 1, 1)$ på normalvektorn till planet. **(1)**

(2) Låt T vara avbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som relativt standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beskriv i ord vad T gör. **(1)**

(b) Vilken matrisrepresentation får T i basen $B = \{(2, 1), (-1, 2)\}$? **(3)**

(3) (a) Använd Gausselimination för att bestämma en bas för nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Använd räkningarna från del (a) för att bestämma dimensionen för kolonnrummet till A, dvs *rangen*[1] av A. **(1)**

[1] eng. *rank*

DEL B

(4) Visa hur Gram-Schmidts metod fungerar genom att bestämma en ortonormal bas för det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 1, 3)$. (Använd den vanliga euklidiska inre produkten, dvs $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.) **(4)**

(5) Betrakta matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -30 & -11 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{e} = (-2, 5)$ och $\mathbf{f} = (1, -3)$ är egenvektorer till B, och bestäm deras tillhörande egenvärden. **(1)**

(b) Uttryck vektorn $\mathbf{u} = (-8, 22)$ som en linjärkombination av $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$. **(2)**

(c) Beräkna $B^{43}\mathbf{u}$ med hjälp av resultaten från (a) och (b). **(1)**

(6) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

där a är en positiv konstant. Bestäm a så att $\mathbb{R}^2$ har en ortogonal bas bestående av egenvektorer till matrisen $B = P^{-1}AP$. Ange även en sådan bas. **(4)**

Var god vänd!

DEL C

(7) Låt planet W vara definerat av ekvationen $x+y+z=0$ och betrakta den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som definieras genom att varje punkt i $\mathbb{R}^3$ projiceras ortogonalt på planet W.

(a) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på en bas där en av basvektorerna är normalvektor till planet och de andra två ligger i planet. **(1)**

(b) Använd basbytesmatris för att från svaret i (a) komma fram till standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

(8) På julafton kokar Algot en tallrik gröt och ställer vid husknuten. För att vara säker på att den är genomkokt mäter han temperaturen, och den är mycket riktigt 100 grader enligt termometern. Efter en timme smyger han ut och ser att tomten inte har varit där ännu, och han passar på att mäta grötens temperatur igen: 10 grader. Efter ytterligare två timmar har tomten fortfarande inte varit framme. Algot mäter temperaturen ännu en gång och nu visar termometern bara 1 grad. Tomten har fastnat i en skorsten och det tar ytterligare tre timmar innan han hittar fram till gröten.

Det är nollgradigt ute och enligt Newtons avsvalningslag gäller

$$T = 10^{a-bt}$$

där T är temperaturen (i grader), t är tiden (i timmar) och a och b är reella konstanter.

(a) Logaritmera avsvalningslagen till $\log_{10} T = a - bt$. Algots mätningar ger tre ekvationer men vi har bara två obekanta, a och b. Vad blir a och b om man löser ekvationssystemet med minsta-kvadratmetoden? (För positiva tal x är 10-logaritmen, $\log_{10} x$, det tal som uppfyller $10^{\log_{10} x} = x$. Exempelvis är $\log_{10} 100 = 2$ eftersom $100 = 10^2$.) **(3)**

(b) Om vi ska lita på minsta-kvadratmetodens approximation, vad har gröten för temperatur när tomten kommer? Svara med ett bråk eller på decimalform. **(1)**

(9) Låt V och W vara 3-dimensionella underrum i ett 5-dimensionellt vektorrum U. Visa att det måste finnas någon nollskild vektor $\mathbf{u}$ som tillhör både V och W. **(4)**