KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2011-01-10

DEL A

(1) De tre totalmatriserna

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ och } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

svarar mot linjära ekvationssystem i fem obekanta x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

(a) En av matriserna är på *reducerad trappstegsform*[1]. Vilken? **(1)**

(b) Välj någon av matriserna och använd denna för att bestämma lösningsmängden till motsvarande ekvationssystem. **(2)**

(c) Avgör om någon av de andra två matriserna svarar mot ett linjärt ekvationssystem med samma lösningsmängd. **(1)**

Lösning.

(a) Det är den mittersta matrisen som är på reducerad trappstegsform. Alla tre är på trappstegsform med ledande ettor i första, andra och fjärde kolonnen, men den första och den tredje är inte eliminerade ovanför den ledande ettan i fjärde kolonnen.

(b) I och med att den mittersta matrisen är på reducerad trappstegsform är det lättast att använda den. Vi inför en parameter för de båda fria variablerna som svarar mot kolonnerna utan ledande etta. Vi får $x_3 = s$ och $x_5 = t$. Därefter kan vi använda de tre ekvationerna för att lösa ut de bundna variablerna och får

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 3x_3 - 4x_5 = 4 - 3s - 3t, \\ x_2 &= 1 - 3x_3 - 3x_5 = 1 - 3s - 3t, \\ x_4 &= -x_5 = -t \end{aligned}$$

Därmed ges lösningsmängden av

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4 - 3s - 4t, 1 - 3s - 3t, s, -t, t)$$

där s och t är reella parametrar.

[1] eng. *reduced row-echelon form*

(c) VI kan fortsätta eliminera den första och den tredje matrisen till reducerad trappstegsform och får då

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

och

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_3 \\ r_2 + 3r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

I det första fallet får vi samma reducerade trappstegsform, och lösningsmängden är därmed lika med den från del (b). I det andra fallet får vi en annan reducerad trappstegsform och lösningsmängden är därmed en annan.

$\square$

Svar:

(a) Den mittersta är på reducerad trappstegsform.

(b) Lösningsmängden ges av $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4 - 3s - 4t, 1 - 3s - 3t, s, -t, t)$, är s och t är reella parametrar.

(c) Den första matrisen svarar mot ett ekvationssystem med samma lösningsmängd, medan den tredje inte gör det.

(2) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller att

$$T(1,2) = (3,1,4) \quad \text{och} \quad T(1,1) = (2,1,3).$$

(a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

(b) Bestäm en bas för *bildrummet*[2] till T. **(1)**

Lösning. (a) För att bestämma standardmatrisen för T behöver vi beräkna värdena på standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ och $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Vi kan göra det genom att uttrycka standardbasvektorerna i de givna vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,2)$ och $\mathbf{u}_3 = (1,1)$. Det går att se att

$$(1,0) = 2(1,1) - (1,2) \quad \text{och} \quad (0,1) = (1,2) - (1,1).$$

Därmed får vi att

$$T(1,0) = 2T(1,1) - T(1,2) = 2(2,1,3) - (3,1,4) = (1,1,2)$$

och

$$T(0,1) = T(1,2) - T(1,1) = (3,1,4) - (2,1,3) = (1,0,1).$$

Värdena på standardbasvektorerna utgör kolonnerna i standardmatrisen som därmed är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan också lösa problemet genom att se att A uppfyller att

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

och vi får fram A som

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+2\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 2 & 1\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 4\cdot(-1)+3\cdot 2 & 4\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

där vi beräknat inversen genom Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

(b) Eftersom $(1,2)$ och $(1,1)$ spänner upp domänen, $\mathbb{R}^2$, kommer deras bilder att spänna upp bildrummet. Bilderna av dessa båda vektorer är inte parallella och därmed linjärt oberoende. Alltså bildar $(3,1,4)$ och $(2,1,3)$ en bas för bildrummet.
Vi kan också se bildrummet som kolonnrummet för standardmatrisen och eftersom kolonnerna är linjärt oberoende utgör dessa en bas för kolonnrummet.

□

[2] eng. *range*

Svar:

(a) Standardmatrisen för avbildningen är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) En bas för bildrummet ges av exempelvis $\{(3,1,4),(2,1,3)\}$.

(3) Vektorerna $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{w} = (0, -1, 1)$ spänner upp ett plan W i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_1$ som är parallell med $\mathbf{v}$, och som har längd 1. **(1)**

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_2$ så att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ utgör en ortonormal bas för planet W. **(2)**

(c) När vi beräknar kryssprodukten $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ får vi en normalvektor till W som redan är *normerad*, dvs som har längd 1. Varför? **(1)**

Lösning. (a) Vi har att $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{v}$ där a är en konstant. Längden, eller *normen*, av $\mathbf{u}_1$ blir då $|a||\mathbf{v}| = |a|\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = |a|\sqrt{2}$. Alltså kan vi välja a som $\pm 1/\sqrt{2}$ och får tex $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(b) Vi kan använda Gram-Schmidts metod för att bestämma den andra vektorn och får

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 \\
&= (0, -1, 1) - (0, -1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
&= (0, -1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
&= (0, -1, 1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)
\end{aligned}
$$

För att få en ortonormal bas för W behöver vi också normera v_2 och får som i del (a)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{|\mathbf{v}_2|}\mathbf{v}_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)
\end{aligned}
$$

Alltså utgör $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ och $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ tillsammans en ortogonal bas för W.

(c) När vi bildar kryssprodukten av de två vektorerna får vi en vektor som är ortogonal mot bägge och därmed ortogonal mot planet. Längden av vektorn ges av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Eftersom dessa utgör en ortogonal bas för planet spänner de upp en kvadrat med sidan 1, vars area också är 1 areaenhet. $\square$

Svar:

(a) $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ är parallell med $\mathbf{v}$ och har längd ett.

(b) $\mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ utgör tillsammans med $\mathbf{u}_1$ en ortogonal bas för planet W.

DEL B

(4) En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening. **(3)**

(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna. **(1)**

Lösning. (a) Vi sätter in de fyra värdena i ekvationen $kx + m = y$ och får då ett överbestämt ekvationssystem

$$\begin{cases} -2k + m = 1, \\ 1k + m = 2, \\ 4k + m = 2, \\ 7k + m = 6. \end{cases}$$

För att hitta den lösning som är bäst i minsta-kvadratmening ser vi på när skillnaden mellan högerled och vänsterled är så liten som möjligt, vilket händer när denna vektor är ortogonal mot kolonnrummet till koefficientmatrisen. Vi leds därmed till normalevationen $A^{\mathsf{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$, dvs

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 70 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vi kan lösa detta ekvationssystem med hjälp av Gausselimination på totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 70 & 10 & 50 \\ 10 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

och får

$$\left(\begin{array}{cc|c} 70 & 10 & 50 \\ 10 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{70}r_1 \\ r_2 - \frac{1}{7}r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{18}{7} & \frac{27}{7} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{18}r_2 \\ \frac{7}{18}r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

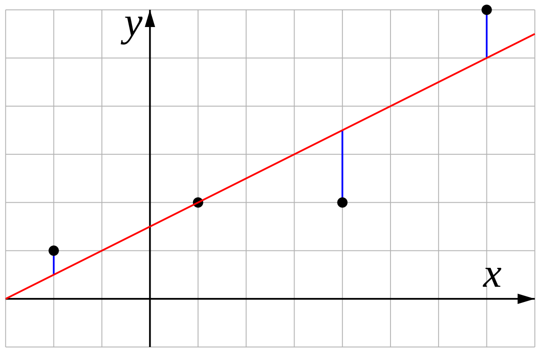
Alltså ges minsta kvadratlösningen av $k = 1/2$ och $m = 3/2$, dvs linjen $y = x/2 + 3/2$ passar bäst till punkterna.

(b)

Det är summan av kvadraterna av de vertikala avvikelserna som har minimerats för just denna linje, vilket i det här fallet är $(1/2)^2 + 0^2 + (3/2)^2 + 1^2 = 7/2 = 3{,}5$. □

Svar:

(a) $k = 1/2$ och $m = 3/2$.



FIGUR 1. Linjen tillsammans med de fyra punkterna.

(b) Summan av kvadraterna av avvikelserna, i detta fall är det minsta värdet $7/2 = 3{,}5$.

(5) (a) Förklara varför matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar precis bara om $a = 0$. **(1)**

(b) Bestäm då $a = 0$ en ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ blir diagonal. **(3)**

Lösning. (a) En kvadratisk matris har en ortogonal bas av egenvektorer om och endast om den är symmetrisk enligt en sats ur boken. Att $A = A^{\mathsf{T}}$ betyder i vårt fall precis att $a = 0$, eftersom resten av matrisen är symmetrisk. Alltså kommer den vara ortogonalt diagonaliserbar om $a = 0$.

(b) Vi behöver först bestämma egenvärden och egenvektorer. Den karaktäristiska ekvationen ges av $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi har att

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4^2) = (8-\lambda)(2-\lambda-4)(2-\lambda+4) \\ &= (8-\lambda)(-2-\lambda)(6-\lambda). \end{aligned}$$

Egenvärdena, som är rötterna till den karaktäristiska ekvationen, är därmed $\lambda = -2$, $\lambda = 6$ och $\lambda = 8$.

Vi får motsvarande egenvektorer genom att lösa det homogena ekvationssystemet med koefficientmatris $A - \lambda$ för dessa värden på λ. Vi får för $\lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-(-2) & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8-(-2) & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2-(-2) & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{4} r_1 \\ \frac{1}{10} r_2 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = (-t, 0, t)$, där t är en parameter.

För $\lambda = 6$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8-6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2-6 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} r_1 \\ \frac{1}{2} r_2 \\ r_3 + r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t)$, där t är en parameter.

För $\lambda = 8$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8-8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2-8 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} r_1 \\ r_3 + \frac{2}{3} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = (0, t, 0)$, där t är en parameter.

De tre egenvektorerna $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 0)$ tillhör olika egenvärden och är därmed automatiskt ortogonala. För att hitta en ortogonal basbytesmatris P som diagonaliserar A behöver vi nu bara normera egenvektorerna. Vi har att $|(1, 0, 1)| =$

$|(1,0,-1)| = \sqrt{2}$ och $|(0,1,0)| = 1$. Alltså får vi en ortogonal matris som diagonaliserar A som

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$P^{\mathsf{T}}AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

(b) Matrisen $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ gör att $P^{\mathsf{T}}AP$ är diagonal.

(6) För alla heltal $n \geq 2$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen som man får om man skriver upp talen $1, 2, \ldots, n^2$ i ordning, rad för rad. Till exempel är

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna $\det A_2$. **(1)**

(b) Beräkna $\det A_3$ med hjälp av radoperationer. **(1)**

(c) Visa att $\det A_n = 0$ för $n > 3$ genom att påvisa ett linjärt beroende mellan kolonnerna. **(2)**

Lösning. (a) Vi beräknar $\det A_2$, exempelvis med kofaktorutveckling, eller med den kända formeln och får

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

(b) Vi kan beräkna $\det A_3$ med radoperationer genom

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 7r_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - 2r_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

eftersom determinanten av en matris med en nollrad alltid är noll.

(c) Eftersom elementen i varje rad växer med ett från kolonn till kolonn kommer varje kolonn utom de två yttersta att vara lika med medelvärdet av de båda närstående. Därmed har vi linjära relationer

$$\mathbf{c}_i - 2\mathbf{c}_{i+1} + \mathbf{c}_{i+2} = 0$$

för $i = 1, 2, \ldots, n-2$, om $n \geq 3$. Om kolonnerna är linjärt beroende är determinanten alltid noll enligt känd sats.

□

Svar:

(a) $\det A_2 = -2$.

(b) $\det A_3 = 0$.

Var god vänd!

DEL C

(7) Bestäm kortaste avståndet mellan punkten $(7, 6, 5)$ och skärningslinjen mellan planen $2x - z = -1$ och $y = 2$ i $\mathbb{R}^3$. **(4)**

Lösning. Vi skriver linjens ekvation på parameterform. Vi ser att $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ är en punkt på linjen. Vektorprodukten (kryssprodukten) av planens normaler ger linjens riktning:

$$(2, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 2).$$

Alltså har linjen ekvationen

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, 2).$$

Kortaste vägen från punkten $(7, 6, 5)$ till den givna linjen är att gå ortogonalt mot linjens riktningsvektor $(1, 0, 2)$. Vi vill alltså hitta t så att $(1, 0, 2)$ är ortogonal mot

$$(1, 2, 3) + t(1, 0, 2) - (7, 6, 5) = (t - 6, -4, 2t - 2).$$

Nu är

$$(1, 0, 2) \cdot (t - 6, -4, 2t - 2) = t - 6 + 4t - 4 = 5t - 10,$$

vilket är noll om och endast om $t = 2$. Avståndet ges av längden på vektorn $(t - 6, -4, 2t - 2) = (-4, -4, 2)$, vilken är

$$\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6.$$

□

(8) Låt V vara vektorrummet av symmetriska 2×2-matriser, och låt $T : V \to V$ vara avbildningen som som ges av $T(A) = PAP$ för alla A i V, där

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

är en bas för V. **(1)**

(b) Visa att T är en linjär avbildning från V till V. **(1)**

(c) Bestäm matrisen för T med avseende på basen B. **(2)**

Lösning. (a) Vektorrummet V består av alla symmetriska 2×2-matriser. Varje symmetrisk 2×2-matris kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

för några reella tal a, b och c. Detta betyder att den kan skrivas som

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessutom bestämmer talen a, b och c matrisen fullständigt och därmed är uttrycket unikt. Detta är detsamma som att de tre matriserna B utgör en bas för V.

(b) Att T är en *linjär* avbildning innebär att $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$ och att $T(kA) = k(A)$, för alla matriser A_1, A_2, A i V och alla skalärer k.
Vi kontrollerar att

$$T(A_1 + A_2) = P(A_1 + A_2)P = PA_1P + PA_2P = T(A_1) + T(A_2)$$

där vi utnyttjat den distributiva lagen för matrismultiplikationen.
Vidare ser vi att

$$T(kA) = P(kA)P = kPAP = kT(A)$$

där vi utnyttjat att mulitplikation med skalär kan göras före eller efter matrismultiplikationen.
Vi behöver också kolla att $T(A)$ verkligen ligger i V för alla A i V. Detta ser vi genom att

$$(PAP)^{\mathsf{T}} = P^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}} = (-P)A(-P) = PAP$$

om $A = A^{\mathsf{T}}$ eftersom P är antisymmetrisk och uppfyller $P^{\mathsf{T}} = -P$.

(c) För att bestämma matrisen för T med avseende på basen B behöver vi beräkna bilderna av de tre basvektorerna och uttrycka dessa i den givna basen.

Vi får att

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

och

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Eftersom bilderna av basvektorerna omedelbart blev uttryckta med samma basvektorer får vi direkt matrisen

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

för avbildningen T med avseende på basen B.

$\square$

Svar:

(c) Matrisen för avbildningen T relativt basen B ges av $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(9) Betrakta matrisekvationen

$$A^3 = 2A^2 - A.$$

(a) Ge ett exempel på en 3×3-matris som uppfyller ekvationen och som varken är nollmatrisen eller identitetsmatrisen. **(1)**

(b) Visa att 0 och 1 är de enda möjliga egenvärdena för kvadratiska matriser som uppfyller ekvationen oavsett storlek. **(3)**

Lösning. (a) Om vi ser på diagonalmatriser uppfyller dessa ekvationen om och endast om alla dess diagonalelement uppfyller ekvationen. Vi har att $x^3 = 2x^2 - x$ är ekvivalent med $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, dvs $x(x-1)^2 = 0$. Alltså kan vi välja en diagonalmatris med ettor och nollor på diagonalen, exempelvis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som varken är nollmatrisen eller identitetsmatrisen. (Det finns sex olika sådana matriser.)

(b) Låt v vara en egenvektor till A och λ motsvarande egenvärde. Då gäller att $Av = \lambda v$. Eftersom $A^3 = 2A^2 - A$, får vi att $0 = A^3 v - 2A^2 v + Av = \lambda^3 v - 2\lambda^2 v + \lambda v = \lambda(\lambda - 1)^2 v$. Eftersom $v \neq 0$, är $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

$\square$