KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 10 januari, 2010

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1, 2010. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innbär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) De tre totalmatriserna

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ och } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

svarar mot linjära ekvationssystem i fem obekanta x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

(a) En av matriserna är på *reducerad trappstegsform*[1]. Vilken? **(1)**

(b) Välj någon av matriserna och använd denna för att bestämma lösningsmängden till motsvarande ekvationssystem. **(2)**

(c) Avgör om någon av de andra två matriserna svarar mot ett linjärt ekvationssystem med samma lösningsmängd. **(1)**

(2) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller att

$$T(1, 2) = (3, 1, 4) \quad \text{och} \quad T(1, 1) = (2, 1, 3).$$

(a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

(b) Bestäm en bas för *bildrummet*[2] till T. **(1)**

(3) Vektorerna $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{w} = (0, -1, 1)$ spänner upp ett plan W i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_1$ som är parallell med $\mathbf{v}$, och som har längd 1. **(1)**

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_2$ så att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ utgör en ortonormal bas för planet W. **(2)**

(c) När vi beräknar kryssprodukten $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ får vi en normalvektor till W som redan är *normerad*, dvs som har längd 1. Varför? **(1)**

---

[1] eng. *reduced row-echelon form*

[2] eng. *range*

DEL B

(4) En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening. **(3)**

(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna. **(1)**

(5) (a) Förklara varför matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar precis bara om $a = 0$. **(1)**

(b) Bestäm då $a = 0$ en ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ blir diagonal. **(3)**

(6) För alla heltal $n \geq 2$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen som man får om man skriver upp talen $1, 2, \ldots, n^2$ i ordning, rad för rad. Till exempel är

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna $\det A_2$. **(1)**

(b) Beräkna $\det A_3$ med hjälp av radoperationer. **(1)**

(c) Visa att $\det A_n = 0$ för $n > 3$ genom att påvisa ett linjärt beroende mellan kolonnerna. **(2)**

Var god vänd!

DEL C

(7) Bestäm kortaste avståndet mellan punkten $(7, 6, 5)$ och skärningslinjen mellan planen $2x - z = -1$ och $y = 2$ i $\mathbb{R}^3$. **(4)**

(8) Låt V vara vektorrummet av symmetriska 2×2-matriser, och låt $T : V \to V$ vara avbildningen som som ges av $T(A) = PAP$ för alla A i V, där

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

är en bas för V. **(1)**

(b) Visa att T är en linjär avbildning från V till V. **(1)**

(c) Bestäm matrisen för T med avseende på basen B. **(2)**

(9) Betrakta matrisekvationen

$$A^3 = 2A^2 - A.$$

(a) Ge ett exempel på en 3×3-matris som uppfyller ekvationen och som varken är nollmatrisen eller identitetsmatrisen. **(1)**

(b) Visa att 0 och 1 är de enda möjliga egenvärdena för kvadratiska matriser som uppfyller ekvationen oavsett storlek. **(3)**