KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2011-10-17

Del A

(1) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(3, 5, 5)$ och $(4, 5, 7)$ och som är vinkelrätt mot planet med ekvation $x + y + z - 7 = 0$. **(4)**

Lösning. För att bestämma en ekvation för planet kan vi först bestämma en normalvektor, $\vec{n}$. Denna ska vara ortogonal mot normalvektorn till det andra planet och mot vektorn mellan de två givna punkterna i planet, dvs mot

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix}4\\5\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi använda vektorprodukten för att bestämma $\vec{n}$ som

$$\vec{n} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2 - 1\cdot 0\\1\cdot 1 - 1\cdot 2\\1\cdot 0 - 1\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Vi har nu att ekvationen kan skrivas som $2x - y - z = d$ för någon konstant d och vi kan sätta in någon av de två givna punkterna för att bestämma d. Vi får då $d = 2\cdot 3 - 5 - 5 = -4$. □

Svar: En ekvation för planet är $2x - y - z = -4$.

(2) Givet vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(2)**

(b) Skriv vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$. **(2)**

Lösning. (a) För att se att de tre vektorerna ska utgöra en bas för $\mathbb{R}^3$ räcker det att kontrollera att de är linjärt oberoende. Detta kan vi göra genom att ställa dem som kolonnerna i en matris och se att vi får en ledande etta i varje kolonn efter Gausselimination.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 - 3r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi har fått en ledande etta i varje kolonn var de tre vektorerna linjärt oberoende och de bildar därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) För att skriva den givna vektorn som en linjärkombination av basvektorerna söker vi koefficienterna x_1, x_2 och x_3 så att $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$. Vi behöver därmed lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Vi använder samma radoperationer som ovan för att reducera till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 \\ -r_2 \\ r_3 - 3r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Lösningen ges därmed av $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ och $x_3 = 3$. Vi kan därmed skriva

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(b) $\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$.

(3) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna determinanten för A. **(2)**

(b) Beräkna $\det((A^T A)^{-5})$. **(2)**

Lösning. (a) Vi kan beräkna determinanten genom Laplaceutveckling efter första raden och får då

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \big(4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)\big) - 2 \cdot \big(3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0\big) \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 3.\end{aligned}$$

(b) Enligt räknereglerna för determinanter är $\det((A^T A)^{-5}) = [(\det A^T)(\det A)]^{-5} = [(\det A)(\det A)]^{-1} = (3 \cdot 3)^{-5} = 3^{-10}$.

□

Svar:

(a) $\det(A) = 3$

(b) $\det((A^T A)^{-5}) = 3^{-10}$.

DEL B

(4) Bestäm matrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, ges av planet med ekvation $x + 3y - 7z = 0$. **(4)**

Lösning. Det finns många olika linjära avbildningar som har samma bildrum. Ett sätt välja en är att välja två tre vektorer i planet som kolonnvektorer i matrisen och se till att inte alla tre är parallella. På så vis kommer bildrummet att ligga i planet och inte vara endimensionellt. Vi kan exempelvis välja vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det är klart att de första två inte är parallella och därmed spänner de tre vektorerna tillsammans upp planet. Matrisen för en avbildning som har planet som bildrum är därmed

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Svar: $A = \left[\begin{smallmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ är matrisen för en linjär avbildning som har planet $x + 3y - 7z = 0$ som bildrum.

(5) Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Kontrollera att $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ är en egenvektor till A. **(1)**

(b) Bestäm samtliga egenvärden till A och bestäm en bas för varje egenrum till A. **(3)**

Lösning. (a) Vi multiplicerar A med vektorn $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ och får

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ -6 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alltså ser vi att $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ är en egenvektor med egenvärde 3.

(b) För att bestämma övriga egenvärden kan vi betrakta den karakteristiska ekvationen $\det(A - xI_3) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \det \begin{bmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ -3 & -x & 3 \\ -6 & -6 & 9-x \end{bmatrix} = (3-x) \det \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -6 & 9-x \end{bmatrix} \\ &= (3-x)(-x(9-x) - 3 \cdot (-6)) = (3-x)(x^2 - 9x + 18). \end{aligned}$$

Vi har redan sett att $x = 3$ är en lösning till den karakteristiska ekvationen och vi får resterande lösningar från andragradsekvationen $x^2 - 9x + 18 = 0$ som med hjälp av kvadratkomplettering kan skrivas

$$\begin{aligned} &(x - \tfrac{9}{2})^2 - \tfrac{81}{4} + 18 = 0 \iff (x - \tfrac{9}{2})^2 - \tfrac{9}{4} = 0 \\ &\iff (x - \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{9}{2} - \tfrac{3}{2}) = 0 \iff (x-3)(x-6) = 0. \end{aligned}$$

Det finns alltså bara två egenvärden, $\lambda = 3$ och $\lambda = 6$. Vi bestämmer alla egenvektorer med egenvärde $\lambda = 3$ genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi inför parametrar för de två fria variablerna och kan skriva samtliga lösningar som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s och t är reella parametrar. En bas för egenrummet med egenvärde 3 ges därmed av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observera att den egenvektor som gavs i del (a) kan skrivas som $2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$.

För egenvärdet $\lambda = 6$ löser vi ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{6}r_2 \\ r_3 - 3_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi inför en parameter för den fria variabeln och får alla lösningar som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter. En bas för egenrummet ges av exempelvis vektorn

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -3 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ -6 \cdot -1 - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -6 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 9 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -6 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(b) Egenvärdena till A är 3 och 6 och baser för motsvarande egenrum ges av $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ respektive $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

(6) Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som har en bas B som består av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vilken av vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ligger i W? **(2)**

(b) Bestäm koordinatvektorn med avseende på basen B för den av vektorerna som ligger i W. **(2)**

Lösning. (a) För att avgöra vilken vektor som ligger i delrummet ska vi se vilket ekvationssystem som har lösning av $x\vec{u}_1+y\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, $x\vec{u}_1+y\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ och $x\vec{u}_1+y\vec{u}_2 = \vec{v}_3$. Alla dessa har samma koefficientmatris och vi kan lösa problemet genom att Gausseliminera en totalmatris med tre högerled.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 - r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Eftersom det är ledande ettor i de två första raderna i koefficientmatrisen är systemet lösbart precis om de två nedersta raderna i högerledet är noll. Detta gäller bara för det andra systemet och det är därmed $\vec{v}_2$ som ligger i W.

(b) För att bestämma koordinaterna kan vi eliminera vidare för det system som har $\vec{v}_2$ som högerled och får då

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och vi kan läsa av lösningen som $x = 3$ och $y = -4$. Koordinatvektorn för $\vec{v}_2$ i basen $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ges därmed av

$$[\vec{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) Det är $\vec{v}_2$ som ligger i W.

(b) Koordinatvektorn för $\vec{v}_2$ med avseende på basen B är $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right]$.

DEL C

(7) Det finns många linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som bevarar area och avbildar vektorn $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ på vektorn $\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$. Bestäm alla sådana linjära avbildningar. **(4)**

Lösning. Att avbildningen bevarar area betyder att beloppet av determinanten för dess matris är 1. Triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$ ska avbildas på en triangel med area $1/2$. Om $(1,0)$ avbildas på (a,b) betyder det att arean av triangeln med hörn $(0,0)$, (a,b) och $(4,3)$ ska vara $1/2$. Arean av denna triangel ges av

$$\frac{1}{2}|3a-4b|$$

och därmed ska vi ha att $3a-4b=1$ eller $3a-4b=-1$. Lösningarna till detta kan skrivas

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter.

För att få matrisen för T nu se vad standardbasen avbildas på. Vi har att

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

och

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} - \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}.$$

Sammantaget ser vi att matrisen för T kan skrivas som

$$\begin{bmatrix}1+4t & 3-4t\\ 1+3t & 2-3t\end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix}-1+4t & 5-4t\\ -1+3t & 4-3t\end{bmatrix}.$$

□

Svar: Alla sådan avbildningar ges av matriserna $\left[\begin{smallmatrix}1+4t & 3-4t\\ 1+3t & 2-3t\end{smallmatrix}\right]$ och $\left[\begin{smallmatrix}-1+4t & 5-4t\\ -1+3t & 4-3t\end{smallmatrix}\right]$ där t är en reell parameter.

(8) Låt $\vec{u}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ med ett rätvinkligt koordinatsystem. Vinkeln mellan $\vec{u}$ och x-axeln är $60°$ och vinkeln mellan $\vec{u}$ och y-axeln är $45°$. Bestäm vinkeln mellen $\vec{u}$ och z-axeln. **(4)**

Lösning. Vi kan utgå från att vektorns längd är ett eftersom vinklarna inte ändras av skalning. Vi har därmed att x-koordinaten för $\vec{u}$ är $\pm\cos 60° = \pm\frac{1}{2}$ och y-koordinaten är $\pm\cos 45° = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom vektorns längd är ett ges nu z-koordinaten av

$$= 1 - (\pm\frac{1}{2})^2 - (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}. = \frac{1}{4}.$$

Om vinkeln till z-axeln är θ har vi därmed att $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ och vi kan dra slutsatsen att vinkeln mot z-axeln också är $60°$ eller $120°$. □

Svar: Vinkeln mot z-axeln är $60°$ eller $120°$.

(9) Visa att om det finns någon bas i $\mathbb{R}^n$ vars vektorer är egenvektorer till de båda $n \times n$-matriserna A och B så *kommuterar* dessa, dvs $AB = BA$.

Lösning. När vi byter bas till den bas som består av egenvektorerna för matriserna kommer båda matriserna att diagonaliseras. Vi kan alltså genom att välja de den gemensamma egenbasen som kolonner i en matris S få

$$S^{-1}AS = D_1 \quad \text{och} \quad S^{-1}BS = D_2$$

där D_1 och D_2 är diagonalmatriser. Eftersom diagonalmatriser kommuterar har vi att $D_1D_2 = D_2D_1$ och vi får därför att

$$AB = SD_1S^{-1}SD_2S^{-1} = SD_1D_2S^{-1} = SD_2D_1S^{-1} = SD_2S^{-1}SD_1S^{-1} = BA.$$

□
