KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 17 oktober, 2011

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(3, 5, 5)$ och $(4, 5, 7)$ och som är vinkelrätt mot planet med ekvation $x + y + z - 7 = 0$. **(4)**

2. Givet vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Visa att $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(2)**
   (b) Skriv vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$. **(2)**

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Beräkna determinanten för A. **(2)**
   (b) Beräkna $\det((A^T A)^{-5})$. **(2)**

DEL B

4. Bestäm matrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, ges av planet med ekvation $x + 3y - 7z = 0$. **(4)**

5. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$
   (a) Kontrollera att $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till A. **(1)**
   (b) Bestäm samtliga egenvärden till A och bestäm en bas för varje egenrum till A. **(3)**

6. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som har en bas B som består av vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vilken av vektorerna
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   ligger i W? **(2)**
   (b) Bestäm koordinatvektorn med avseende på basen B för den av vektorerna som ligger i W. **(2)**

Var god vänd!

DEL C

7. Det finns många linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som bevarar area och avbildar vektorn $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ på vektorn $\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$. Bestäm alla sådana linjära avbildningar. **(4)**

8. Låt $\vec{u}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ med ett rätvinkligt koordinatsystem. Vinkeln mellan $\vec{u}$ och x-axeln är 60° och vinkeln mellan $\vec{u}$ och y-axeln är 45°. Bestäm vinkeln mellen $\vec{u}$ och z-axeln. **(4)**

9. Visa att om det finns någon bas i $\mathbb{R}^n$ vars vektorer är egenvektorer till de båda $n \times n$-matriserna A och B så *kommuterar* dessa, dvs $AB = BA$.