KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 9 januari, 2012

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1-2, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm ett tredje hörn, C, i en triangel ABC i planet så att arean av triangeln blir 10 areaenheter om $A = (-1, 1)$ och $B = (2, -3)$. **(4)**

2. Låt V vara det tredimensionella delrum i $\mathbb{R}^4$ som ges av $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ och låt S vara mängden som består av följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm alla vektorer i S som ligger i delrummet V. **(2)**
   (b) Bestäm en bas för V som består av några av vektorerna från S. **(2)**

3. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som representeras av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum för avbildningen T. **(3)**
   (b) Bestäm en bas B för $\mathbb{R}^2$ så att matrisen för T med avseende på basen B blir en diagonalmatris. **(1)**

DEL B

4. En ingenjör har vid ett experiment uppmätt följande värden för tre storheter x, y och z enligt följande tabell:

x	-1	-1	0	1	1
y	-1	1	0	-1	1
z	3	5	4	4	7

Enligt en modell för förloppet ska storheterna uppfylla en ekvation $z = ax + by + c$.

(a) Med hjälp av minsta kvadratmetoden leds ingenjören till att lösa ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right].$$

Förklara hur ingenjören kommit fram till detta. **(2)**

(b) Vilken slutsats drar ingenjören när det gäller vilket samband $z = ax + by + c$ som i minsta-kvadratmening passar bäst till de gjorda mätningarna? **(1)**

(c) Jämför modellens värden med mätningarna och förklara vad det är som har minimerats med hjälp av minsta-kvadratmetoden. **(1)**

5. Låt $W = \ker(T)$ vara nollrummet till avbildningen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ortogonal bas för W. **(2)**

(b) Beräkna den ortogonala projektionen på W av vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$. **(2)**

6. Betrakta en linjär avbildning, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sådan att lösningsmängden till

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ges av

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t+1 \\ 3-t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

(a) Bestäm nollrummet, $\ker(T)$. **(2)**

(b) Bestäm bildrummet, $\mathrm{im}(T)$. **(2)**

Var god vänd!

Del C

7. När vi har en triangel i rummet kan vi med hjälp av ortogonal projektion på de tre koordinatplanen xy-planet, xz-planet och yz-planet få tre olika trianglar.
   (a) Beskriv hur vi kan bestämma arean av triangeln om vi känner till areorna av de tre projektionerna. **(2)**
   (b) Illustrera metoden genom att beräkna arean av triangeln med hörn i punktern $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 2)$ och $C = (3, 1, 6)$ både direkt och genom areorna av de tre projektionerna. **(2)**

8. För varje heltal $n \geq 1$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen med ettor på diagonalen och superdiagonalen, minusettor på subdiagonalen och nollor för övrigt. För $n = 1$ finns inga super- eller subdiagonaler så vi definierar $A_1 = (1)$. Exempelvis är

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Det gäller att $\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$ för alla $n \geq 3$. Varför? **(3)**
   (b) Beräkna $\det A_{10}$. **(1)**

9. Visa att en 3×3-matris A med rang $\operatorname{rank}(A) = 1$ och spår $\operatorname{tr}(A) = 0$ inte kan vara diagonaliserbar. **(4)**