Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2007-03-13, kl. 08.00-13.00
5B1147, envariabelanalys för IT och ME (5p)

1. Låt $a = \arcsin \frac{7}{8}$ och $b = \arccos \frac{1}{4}$. Vi har $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ och

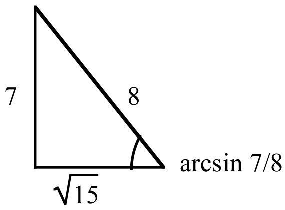
$\sin a = \sin \arcsin \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

$\cos b = \cos \arccos \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

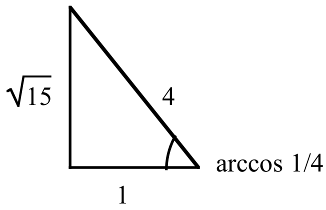
$\sin b = \sin \arccos \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos a = \cos \arcsin \frac{7}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

vilket ger $\sin\left(\arccos \frac{1}{8} + \arcsin \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$



$\cos\left(\arcsin \frac{7}{8}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$



$\sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{11}{16}}$

---

2 Funtionen $f(x) = \arcsin 4x + 2\sqrt{1 - 16x^2}$ är definierad och kontinuerlig på det slutna intervallet $-1/4 \le x \le 1/4$ $\Rightarrow$ f antar ett största och ett minsta värde. Dessa värden antas antingen i en kritisk punkt eller en ändpunkt på intervallet eller i en singulärpunkt.

Kritiska punkter är lösningar till ekvationen $f'(x) = 0$. Vi har

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1 - 16x^2}} - \frac{64x}{2\sqrt{1 - 16x^2}} = \frac{4 - 32x}{\sqrt{1 - 9x^2}} \quad \text{och}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4 - 32x}{\sqrt{1 - 16x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 4 - 32x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1/8.$$

Singulära punkter: inga singulära punkter på intervallet $-1/4 < x < 1/4$.

Ändpunkterna: $-1/4$ och $1/4$.

Aktuella punkter: $1/8, -1/4$ och $1/4$.

I dessa punkter antar f värdena

$f(1/8) = \arcsin 1/2 + \sqrt{3} = \pi/6 + \sqrt{3}$

$f(-1/4) = \arcsin(-1) = -\pi/2$

$f(1/4) = \arcsin(1) = \pi/2$.

Det största av dessa värden är $\pi/6 + \sqrt{3}$ och det minsta är $-\pi/2$.

Svar: största värdet = $\pi/6 + \sqrt{3}$, minsta värdet = $-\pi/2$.

3. Vi söker $\int_0^1 \arctan x\,dx =$ [part. Integration]=

$$[x\arctan x]_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$$

Svar: $\dfrac{\pi-2\ln 2}{4}$ a.e

---

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^4}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$. Restermen $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\le\int_n^{\infty}\frac{1}{x^4}dx=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{-1}{3x^3}\right]_n^N=\frac{1}{3n^3}$.

Vi vill ha $\dfrac{1}{3n^3}<\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{10^3}\Rightarrow n>10$

Vi kan ta

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k^4}\pm\frac{1}{3}10^{-3}$$

5. Vi söker volymen av behållaren dvs vi söker $\pi\displaystyle\int_5^{\infty}\left(f(x)\right)^2dx=$

$$\pi\int_5^{\infty}\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx=\lim_{b\to\infty}\int_5^b\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx$$

Vi har

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\begin{cases}A+B=0\\-4A-2B=1\end{cases}\Rightarrow B=\frac{1}{2},A=\frac{-1}{2}$$

och

$$\int_5^b\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx=\int_5^b\frac{-1/2}{x-2}dx+\int_5^b\frac{1/2}{x-4}dx=$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-4}{x-2}\right)\right]_5^b=\frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{b-4}{b-2}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-4}{b-2}\right)+\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_5^b\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b-4}{b-2}\right)$$

och $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b-4}{b-2}\right)=\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{1-\frac{4}{b}}{1-\frac{2}{b}}\right)=\ln 1=0$

Volymen av behållaren är $V=\pi\dfrac{\ln 3}{2}$ v.e

Svar: Det tar $\pi\dfrac{\ln 3}{2}$ s för att tömma ut behållaren.

6 Vi söker längden av banan

Längden ges av $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, där $y(x) = \int\limits_0^{x} \sqrt{\cos^4 x \sin^2 x - 1}\,dx$. Vi har

$$y'(x)) = \sqrt{\cos^4 x \sin^2 x - 1} \Rightarrow (y')^2 = \cos^4 x \sin^2 x - 1 \cdot$$

Alltså

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^4 x \sin^2 x - 1}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x, dt = -\sin x dx \\ x : 0 \to \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \to 0 \end{bmatrix} = -\int\limits_1^0 t^2 dt = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Svar det $\frac{1}{3}$ s för den snabba myrran att springa över bannan

7. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 8r + 16 = 0$ vilken har dubbelroten $r = 4$, alltså $y_h = (Ax + B)\,e^{4x}$ är den allmänna lösningen till $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 8y' + 16y = 80x - 40$. Ansats $y = ax + b$ ger $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $16ax + 16b - 8a = 80x - 40$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x-potenser vara lika, dvs $16a = 80$ och $16b - 8a = -40$, alltså $a = 5$ och $b = 0$. Man får alltså partikulärlösningen $y_1 = 5x$.

Betrakta ekvationen $y'' - 8y' + 16y = 5e^{5x}$. Vi ansätter $y = ae^{5x}$. Man får $y' = 5ae^{5x}$ och $y'' = 25ae^{5x}$. Insättning i ekvationen ger $ae^{5x} = 5e^{5x}$ dvs $a = 5$. Funktionen $y_2 = 5e^{5x}$ är alltså en partikulärlösning till ekvationen. Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_1 + y_2$.

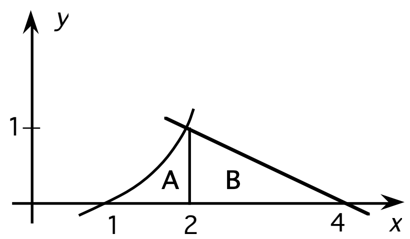
Svar y=$(Ax + B)\; e^{4x} + 5x + 5\,e^{x}$

8a. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, $y' = \dfrac{\sqrt{1+2x-x^2} - (x-1)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{1+2x-x^2}}}{1+2x-x^2} = \dfrac{2}{(1+2x-x^2)^{3/2}}$ och

$y'(2) = 2$, alltså normalens ekvation: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$.

Svar: $x + 2y = 4.$

8b.



Normalens skärningspunkt med x-axeln är $x = 4$.

Arean av $\mathbf{B} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (4-2) = 1$ och

arean av $\mathbf{A} = \int\limits_1^2 \dfrac{x-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = \int\limits_1^2 \dfrac{x-1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}\,dx =$

$= \left\{ \sqrt{2-(x-1)^2} = t,\ \dfrac{x-1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}\,dx = -\,dt \right\} = \int\limits_{\sqrt{2}}^{1} -dt = \sqrt{2} -$

1.

Den sökta arean är = $1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$. $\boxed{\textbf{Svar: } \sqrt{2}.}$