Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2008-03-10, kl. 14.00-19.00
SF1625, linjär algebra med geometri för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME)
(7,5hp)

1. Lösning: Tal 2.27 i övningsboken med lösning sid 74 (ingår i tal RÄKNA SJÄLV!)
2. Lösning: Tal 4.15a i övningsboken med lösning sid 105 (ingår i tal RÄKNA SJÄLV!)
3. Kurvorna skär varandra då $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x+1 = x^2+1 \Rightarrow x=0$ eller $x=1$.

På intervallet $0 \le x \le 1$ är $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ och den sökta volymen är

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\arctan x - \ln|x+1| \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - \pi \ln 2.$$

$\boxed{\text{Svar: } \frac{\pi^2}{4} - \pi \ln 2.}$

4. Totalt antal riskorn på schackbrädets 64 rutor om man lägger ett på den första rutan, 3 på den andra, nio på den tredje o.s.v.

$$\sum_{n=1}^{64} 3^{n-1} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{63}$$

Geometrisk summa (se kursboken sid 171) med kvoten k=3, antal termer n=64 , beräknas med formeln:

$$\sum_{n=1}^{N} k^{n-1} = \frac{1-k^N}{1-k} = \left[k=3, N=64 \right] = \frac{1-3^{64}}{1-3} = (3^{64}-1)/2$$

Svar: Antal riskorn på schackbrädet blir $(3^{64}-1)/2$.

5. Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Detta betyder att $y_h(x) = e^x \left(C_1 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{3}x\right) \right)$.

Pga att höger ledet $\sin x$ är inte en lösning till den homogena delen så ansätter vi som en partikulär lösning

$y_p(x) = A\sin x + B\cos x$. Det följer

$y_p'(x) = a\cos x - B\sin x, y_p''(x) = -A\sin x - B\cos x$ och in i den givna differentialekvationen

$y'' - 2y' + 4y = 13\sin x$.

Vi får

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = (-A + 2B + 4A)\sin x + (-B - 2A + 4B)\cos x$$

Vilket ger ekvationsystemet

$$\begin{cases} 3A + 2B = 13 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$$

Alltså är $y_p(x) = A\sin x + B\cos x = 3\sin x + 2\cos x$

Delsvar: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x \left(C_1 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{3}x\right) \right) + 3\sin x + 2\cos x$

Använd $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$ för att bestämma C_1 och C_2.

$y(0) = C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$

Vi derivera

$$y(x)=e^x\left(C_1\sin\left(\sqrt{3}x\right)-2\cos\left(\sqrt{3}x\right)\right)+3\sin x+2\cos x$$

$$y'=e^x\left(C_1\sin\left(\sqrt{3}x\right)-2\cos\left(\sqrt{3}x\right)\right)+e^x\left(C_1\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right)+3\cos x-2\sin x\,.$$

som ger

$$y'(0)=(-2)+\left(C_1\sqrt{3}\right)+3=0\Rightarrow C_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Svar $y(x)=e^x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}x\right)-2\cos\left(\sqrt{3}x\right)\right)+3\sin x+2\cos x$

$$6.f(x)=\arctan\left(2x^2+1\right)-\arctan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right)}{1+\left(2x^2+1\right)^2}-\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{1+\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2}=$$

$$\frac{4x}{1+\left(2x^2+1\right)^2}-\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2 2x}{\left(x^2+1\right)^2\left[1+\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2\right]}=\frac{4x}{4x^4+4x^2+2}-\frac{2x}{2x^4+2x^2+1}=0$$

Funktionen $f(x)=\arctan\left(2x^2+1\right)-\arctan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ är kontinuerlig deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$

och $f'(x)=0$ ger att $f(x)=\arctan\left(2x^2+1\right)-\arctan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$=konstant. Denna konstant ges

av $f(0)=\arctan\left(0+1\right)-\arctan(0)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

Svar: Funktionen antar endast värdet $\frac{\pi}{4}$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^4}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^4}$.

Restermen $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^4}\le\int_n^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_n^{\infty}\frac{1}{x^4}d=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{-1}{3x^3}\right]_n^N=\frac{1}{3n^3}$.

Vi vill ha $\frac{1}{3n^3}<\frac{1}{3}\frac{1}{10^3}\Rightarrow n>10$

Vi kan ta

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^4}=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{1+k^4}\pm\frac{1}{3}10^{-3}$$

8. Lösning se ex1 sid 218 i kursboken

Vi studera funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ för $x > 0$. Vi

får $f'(x) = \left[\text{se si 218 ex1}\right] = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x) = 0 \Rightarrow x = e$.

Och för derivatans tecken får vi tabellen

x	0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$	$\nearrow$	$f(e) = e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Av tabellen framgår att $f_{\max} = f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. Det återstår att avgöra vilket av talen

$a = f(2) = 2^{\frac{1}{2}}$ samt $b = f(3) = 3^{\frac{1}{3}}$ som är störst! Obs $2 < e < 3$

eftersom $a^6 = 8$ och $b^6 = 9$ så följer att $b > a$.

Slutsatsen är att av alla tal $\sqrt[n]{n}$ $n = 2,3,4,....$ så är $\sqrt[3]{3}$ störst!