KTH Matematik,
Karim och Olle.

Lösningsförslag till SF1625 Envariabelanalys för E, IT och ME, 08–06–04, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 25–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Karim eller Olle i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K (eller U) med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. För vilka (reella) tal a har ekvationen

$$4^x + 2^{x+1} = a$$

någon (reell) lösning? Bestäm (de reella) lösningarna för dessa a. *Ledning:* Sätt till exempel $t = 2^x$. (3p)

Lösning: $4^x = (2 \cdot 2)^x = 2^x \cdot 2^x = t^2$ och $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2t \Longrightarrow$

$$t^2 + 2t - a = 0 \iff t = -1 \pm \sqrt{1+a},$$

som är reell $\iff a \geq -1$. Nu är $t = 2^x > 0$ för alla x, medan $-1 - \sqrt{1+a} < 0$. Så vi måste ha $t = 2^x = -1 + \sqrt{1+a}$, där $\sqrt{1+a} > 1 \Longrightarrow a > 0$. Logaritmering ger sedan

$$x \cdot \ln 2 = \ln\left(\sqrt{1+a} - 1\right) \iff x = \frac{\ln\left(\sqrt{1+a} - 1\right)}{\ln 2}.$$

2. Låt $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$.

   (a) Bestäm alla x för vilka $f(x)$ är definierad (som en reell funktion). (2p)

   Lösning: $\ln(x+1)$ definierad $\Longrightarrow x > -1$; $\sqrt{1+\ln(x+1)}$ reell $\Longleftrightarrow 1 + \ln(x+1) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) \geq -1 \Longleftrightarrow x + 1 \geq e^{-1}$ (eftersom exponentialfunktionen är växande) $\Longleftrightarrow x \geq -1 + e^{-1}$.

   (b) Bestäm tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ genom punkten $(0,1)$ på denna kurva. (1p)

   Lösning: Tangentlinjen genom $(0,1)$ ges av $y - 1 = f'(0) \cdot (x - 0)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln(x+1))^{-1/2} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln(x+1)} \cdot (x+1)}$$

$$\Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{ tangentlinjen blir } y = 1 + \frac{1}{2}x.$$

3. Beräkna integralen

$$\int \frac{x}{(1-x)^3}\, dx. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Vi använder partiell integration:

$$\begin{aligned}
&\int x \cdot (1-x)^{-3}\, dx = \int x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(1-x)^{-2}\right) dx \\
&= x \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-2} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-2}\, dx \\
&= \frac{x}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + C = \frac{x-1+x}{2(1-x)^2} + C \\
&= \frac{2x-1}{2(1-x)^2} + C.
\end{aligned}$$

4. Beräkna de fem första från noll skilda termerna i MacLaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right). \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots, \text{ där } f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Nu är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \\ &= \frac{-2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2} = \frac{-1}{1+x^2} = -\frac{1}{1-(-x^2)}. \end{aligned}$$

Låt oss använda den geometriska serien:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \quad \text{då } |t| < 1$$

med $t = -x^2$:

$$f'(x) = -\big(1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots\big) = -1+x^2-x^4+x^6+\dots$$

Vi får tillbaka $f(x)$ genom integration:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \dots \quad \text{då } |x| < 1.$$

5. Beräkna följande gränsvärden och MOTIVERA dina svar (till exempel genom att utnyttja kända standardgränsvärden).

   (a)
   $$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(1p)}$$

   Lösning: $|\sin x| \le 1$ för alla $x \implies -|x| \le x\cdot\sin(1/x) \le |x|$; då $x \to 0$ går ytterleden mot noll $\implies \lim_{x\to 0} x\cdot\sin(1/x) = 0$.

   (b)
   $$\lim_{x\to \infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(1p)}$$

   Lösning: $x \to \infty \implies t = 1/x \to 0 \implies$

   $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin(1/x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow -1/x \leq \cos x/x \leq 1/x$ då $x > 0$; $x \to \infty \Longrightarrow$ ytterleden $\to 0 \Longrightarrow \cos x/x \to 0$.

(d)

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (\ln(x+1) - \ln x)\,. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning: $x \cdot (\ln(x+1) - \ln x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$= \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \to \ln e = 1 \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 - r - 2 = 0 \Longrightarrow$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Longrightarrow y_{\text{hom}} = A\,e^{2x} + B\,e^{-x}.$$

Ansatsen $y_{\text{part}} = ax + b \Longrightarrow 0 - a - 2ax - 2b = x \iff (2a+1)x + (a+2b) = 0$ för alla $x \Longrightarrow a = -1/2$ och $b = -a/2 = 1/4 \Longrightarrow y_{\text{part}} = -x/2 + 1/4$. Så $y = A\,e^{2x} + B\,e^{-x} - x/2 + 1/4$, vilket ger $y' = 2A\,e^{2x} - B\,e^{-x} - 1/2$.

$$\begin{cases} 2 = y(0) = A + B + 1/4 \iff A + B = 7/4, \\ 0 = y'(0) = 2A - B - 1/2 \iff 2A - B = 1/2. \end{cases}$$

Adderas ekvationerna till höger om $\iff$ fås $3A = 9/4 \iff A = 3/4$; sedan ger första ekvationen att $B = 7/4 - 3/4 = 1$. Det vill säga,

$$y(x) = \frac{3}{4}\,e^{2x} + e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

7. Beräkna först arean $A(b)$ av det område i xy-planet som begränsas av x-axeln, de vertikala linjerna $x = 0$, $x = b$ (där $b > 0$) och kurvan $y = x \cdot (x^2 + 2)^{-3/2}$. Visa sedan att $\lim_{b\to\infty} A(b)$ existerar samt beräkna detta gränsvärde. (4p)

Lösning: $A(b) = \displaystyle\int_0^b x \cdot (x^2+2)^{-3/2}\,dx = \{u = x^2+2,\ du = 2x\,dx\}$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=2}^{u=b^2+2} u^{-3/2}\,du = \left[-u^{-1/2}\right]_2^{b^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

då $\quad b \to \infty$.

8. Funktionen $f(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3x+2} & \text{då} \quad x \neq -1, -2, \\ f(1) = 2. \end{cases}$$

(a) Beräkna Taylorutvecklingen av $f(x)$ omkring punkten $x = 1$ till och med ordningen 2. (2p)

Lösning:

$$f(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right).$$

$$f(1) = 2,\ f'(1) = \frac{2}{1+3+2} = \frac{1}{3},$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3x+2)\cdot 2 - 2x\cdot(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$\Longrightarrow f''(1) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \Longrightarrow$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{36}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right).$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{3f(x) - x - 5}{(x-1)^2}. \qquad \text{(2p)}$$

Lösning:

$$\frac{3f(x) - x - 5}{(x-1)^2} = \frac{6 + x - 1 + \frac{1}{12}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right) - x - 5}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{12} + \mathcal{O}(x-1) \to \frac{1}{12} \quad \text{då} \quad x \to 1.$$