KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till tentamen i SF1625 Envariabelanalys för CELTE1, CMAST1, CMED1 och CSAM1, 08–12–15.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta din kursledare i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{5x^2+2x+1}} \qquad (3p)$$

Lösning:

$$x>0 \Longrightarrow \frac{4x+2}{\sqrt{5x^2+2x+1}} = \frac{x}{x}\cdot\frac{4+2/x}{\sqrt{5+2/x+1/x^2}}$$
$$= \frac{4+2/x}{\sqrt{5+2/x+1/x^2}} \to \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{då} \quad x\to\infty.$$

2. Låt funktionen
$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$
vara definierad för $1 \le x < \infty$. Bestäm f:s värdemängd (det vill säga mängden $\{y = f(x)\colon 1 \le x < \infty\}$). (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4} \\ &= -\frac{x^2 - 2x - 3}{x^4} = -\frac{(x+1)(x-3)}{x^4} \Longrightarrow \\ f'(x) &> 0 \text{ då } -1 < x < 3 \text{ och } f'(x) < 0 \text{ då } x > 3.\end{aligned}$$

Så $x \geq 1 \Longrightarrow f(x)$ växer då $1 \leq x \leq 3$ från värdet $f(1) = -1$ till $f_{\max} = f(3) = 1/3 - 1/9 - 1/27 = 5/27$ då $x = 3$, och avtar sedan för $x > 3$. Eftersom $f(x)$ uppenbarligen går mot noll då $x \to \infty$ inser vi att den sökta värdemängden är

$$\left[-1, \frac{5}{27}\right].$$

3. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left\{u = e^x \Longrightarrow x = \ln u \Longrightarrow dx = \frac{du}{u}\right\} \\ &= \int_{u=1}^\infty \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{1}{u^2 + 1} = \lim_{X \to \infty} [\arctan u]_1^X \\ &= \lim_{X \to \infty} \arctan X - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. Undersök huruvida serien

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}}$$

är konvergent eller inte. (3p)

Lösning: Eftersom serien är *positiv* räcker det att visa att den är begränsad för att få konvergens.

$$n \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{n+3} \geq \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \{ \text{ geometrisk serie } \}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{för alla } N \Longrightarrow \text{ konvergens.}$$

Eller kortare:

$0 < a_n = \dfrac{1}{3^n\sqrt{n+3}} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^n} = b_n$ och $\sum b_n$ är konvergent såsom varande en geometrisk serie med $|1/3| < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ är också konvergent.

5. Visa att

$$\ln x > 2\,\frac{x-1}{x+1} \quad \text{då} \quad x > 1. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Vi ska visa att

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} > 0 \quad \text{då} \quad x > 1.$$

Observera att $f(1) = 0 - 0 = 0$. Med

$$f(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{(x+1)-2}{x+1} = \ln x - 2 + 4 \cdot (x+1)^{-1}$$

fås

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \text{ då } x > 1.$$

$f(1) = 0$ och $f'(x) > 0$ då $x > 1 \Longrightarrow f(x)$ *växer* från värdet $f(1) = 0 \Longrightarrow f(x) > 0$ då $x > 1$.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y = 2\sin x$$

som uppfyller $y(0) = y'(0) = 0$. (4p)

Lösning: Till den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$ hör den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm 2i \Longrightarrow y_{\text{hom}} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

$y_p = a\cos x + b\sin x \Longrightarrow y_p' = -a\sin x + b\cos x \Longrightarrow y_p'' = -a\cos x - b\sin x$; detta insatt i differentialekvationen ger

$$
\begin{aligned}
&-a\cos x - b\sin x + 4a\cos x + 4b\sin x = 2\sin x \iff \\
&3a\cos x + (3b-2)\sin x = 0 \text{ för } \textit{alla } x \Longrightarrow a = 0 \text{ och } b = 2/3 \Longrightarrow \\
&y_p = \frac{2}{3}\sin x \Longrightarrow y_{\text{allm}} = y_{\text{hom}} + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{2}{3}\sin x. \\
&0 = y(0) = A \Longrightarrow A = 0; \quad 0 = y'(0) = 2B + \frac{2}{3} \Longrightarrow B = -\frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow y(x) = \frac{1}{3}\,(2\sin x - \sin 2x).
\end{aligned}
$$

7. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan parablerna $y = x^2$ och $y = 8 - x^2$ roterar kring x-axeln. (4p)

   Lösning: I parablernas skärningspunkt är

$$
y = 8 - x^2 = x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.
$$

Den infinitesimala rotationsvolymen dV mellan x och $x + dx$ är

$$
\pi(8-x^2)^2\,dx - \pi\bigl(x^2\bigr)^2\,dx = \pi(64 - 16x^2 + x^4 - x^4)\,dx = 16\pi(4-x^2)\,dx.
$$

Så hela volymen blir

$$
\begin{aligned}
V &= 16\pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 32\pi \int_0^2 (4 - x^2)\,dx \\
&= 32\pi\bigl[4x - x^3/3\bigr]_0^2 = 32\pi(8 - 8/3) = 32\pi \cdot \frac{16}{3} \\
&= \frac{512}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

8. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   (a) Härled MacLaurinpolynomet $p_2(x)$ av ordning 2 och tillhörande restterm $R_3(x)$ för $f(x)$, så att $f(x) = p_2(x) + R_3(x)$. (1p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0)=1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0)=\frac{1}{2},\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{8},\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Longrightarrow \frac{f'''(\xi)}{3!} = \frac{1}{2\cdot 8(1+\xi)^{5/2}} \Longrightarrow\\
f(x) &= \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}} = p_2(x)+R_3(x)
\end{aligned}
$$

för något ξ mellan 0 och x.

(b) Visa att

$$x \geq 0 \Longrightarrow |R_3(x)| \leq \frac{x^3}{16}. \qquad (1p)$$

Łösning:

$$
\begin{aligned}
&x \geq 0 \Longrightarrow \xi \geq 0 \Longrightarrow 1+\xi \geq 1 \Longrightarrow\\
&0 \leq R_3(x) = \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}} \leq \frac{x^3}{16}.
\end{aligned}
$$

(c) Använd resultaten ovan för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{17}$ och för att uppskatta feltermen:

$$\sqrt{17} = \text{ närmevärde } \pm \text{ felterm.} \qquad (2p)$$

Lösning:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{17} &= \sqrt{4^2+1} = 4\sqrt{1+1/16}\\
&= 4\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16^2}\right)+4\cdot R_3(1/16),
\end{aligned}
$$

så

$$\sqrt{17} \approx 4+\frac{1}{8}-\frac{1}{512} \quad \text{med ett fel som ligger mellan 0 och } \frac{1}{4\cdot 16^3}.$$