Tentamenskrivning, 2009-03-09, kl. 08.00-13.00
SF1625, envariabel analys för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + A\arctan x + B\right) = 1 + A\cdot 0 + B = 1 + B$

   så att $\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 + B \Leftrightarrow B = 2$. Vidare , så är

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x} + A\arctan x + 2\right) = 0 + A\cdot\frac{\pi}{2} + 2$

   $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, ty enligt instängningsregeln är $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

   så att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow A\frac{\pi}{2} + 2 \Leftrightarrow A = \frac{-4}{\pi}$

   svar $A = \frac{-4}{\pi}, B = 2$

2. Funktionen $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$, är kontinuerlig på det kompakta intervallet $-1 \le x \le 1$ och således antar sitt största och minsta värde på $-1 \le x \le 1$

I Ändpunkterna är $f(-1) = \sqrt{2} + \arcsin(-1) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ och $f(1) = 0 + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

I det inre är $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$ .Detta ger ev stationära punkter då

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$. Kvadrering ger

$4(1-x) = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1,3$.

Insättning i $2\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$ ger att endast $x = 1$ är den lösningen. Men denna ligger inte i intervallet $-1 < x < 1$. Således f saknar stationära punkter.

Svar minsta värdet $f(-1) = \sqrt{2} + \arcsin(-1) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ och största värdet

$f(1) = 0 + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

3. Den sökta volymen är

$$V = \pi\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx + \pi\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$\pi\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\right]_0^1 + \pi\left[\arctan x\right]_0^1 = \pi(\ln\sqrt{2} + \pi/4)$$

Svar det tar $\pi(\ln\sqrt{2} + \pi/4)$ sec.

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^5}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^5}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^5}$.

Restermen $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^5}\le\int_n^{\infty}\frac{1}{1+x^5}dx\le\int_n^{\infty}\frac{1}{x^5}dx=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{-1}{4x^4}\right]_n^N=\frac{1}{4n^4}$.

Vi vill ha $\frac{1}{4n^4}<\frac{1}{4}\frac{1}{10^4}\Rightarrow n>10$.

Vi kan ta

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^5}=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{1+k^5}\pm\frac{1}{3}10^{-3}$$

5. Vi löser den karakteristiska ekvationen

$r^2-2r+2=0\Leftrightarrow r=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$

Detta betyder att $y_h(x)=e^x\left(C_1\sin(x)+C_2\cos(x)\right)$.

Pga att höger ledet $\sin x$ är inte en lösning till den homogena delen så ansätter vi som en partikulär lösning

$y_p(x)=Bx^2+Cx+D$. Det följer

$y_p'(x)=2Bx+C, y_p''(x)=2B$ och in i den givna differentialekvationen

$y''-2y'+2y=2x^2-2$

Vi får

$y_p''-2y_p'+2y_p=2Bx^2+(-4B+2C)x+2B-2C+D$

Vilket ger ekvationsystemet

$$\begin{cases}2B=2\\-4B+2C=0\\2B-2C+D=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\C=2\\D=0\end{cases}$$

Alltså är $y_p(x)=x^2+2x$

Delsvar: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^x\left(C_1\sin(x)+C_2\cos(x)\right)+x^2+2x$

Använd $y(0)=0$ och $y'(0)=0$ för att bestämma C_1 och C_2.

$y(0)=C_2=0\Rightarrow C_2=0$

Vi derivera $y(x)=e^x\left(C_1\sin(x)\right)+x^2+2x \quad y'=e^x\left(C_1\sin x\right)+e^x\left(C_1\cos x\right)+2x+2$.

som ger

$y'(0)=(C_1)+2=0\Rightarrow C_1=-2$

Svar $y(x)=-2\sin x\ e^x+x^2+2x$

6. Vi söker $Arean=\int_0^{\pi/2}\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}dx=\left[\begin{array}{l}t=\sin x\\dt=\cos x dx\\x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right]=\int_0^1\frac{4}{4-t^2}dt=\int_0^1\frac{4}{(2-t)(2-t)}dt$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{4}{4-t^2}=\frac{A}{2-t}+\frac{B}{2+t}=\frac{A(2+t)+B(2-t)}{4-t^2}=\frac{2A+2B+t(A-B}{4-t^2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A-B=0\\2(A+B)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

Integralen blir då

$$\int_0^1\frac{4}{4-t^2}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right)dt=\left[-\ln(2-t)+\ln(2+t)\right]_0^1=\left[\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\right]_0^1=\ln 3>0$$

Svar $Arean \ln 3$ $(a.e)$

7. (a) $f'(x)=e^x-e^{-x}-1$ och $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e^{-x}-1=0$. Med variabelbytet $t=e^x$ (och kravet $t>0$) blir detta en andragradsekvation

$$t-t^{-1}-1=0\Leftrightarrow t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Eftersom $t=e^x>0$ ger detta $e^x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(b) Vi gör en teckenstudie av derivatan

x		$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$	$\nearrow$

Från tabellen drar vi slutsatsen att $f_{\min}=f\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.

8. Enligt förutsättningarna gäller att

$\int_0^1 f(x)e^x dx=\int_0^1 f''(x)e^x dx$ =[partiell integration]= $\left[f'(x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)e^x\,dx$ =[partiell integration]=$\left[f'(x)e^x\right]_0^1-\left[f(x)e^x\right]_0^1+\int_0^1 f(x)e^x\,dx=$

$$=f'(1)e-f'(0)-f(1)e+f(0)+\int_0^1 f(x)e^x\,dx\,.$$

Det följer att $0=f'(1)e-f'(0)-f(1)e+f(0)$ och $f(0)=2, f'(0)=1, f'(1)=0$ ger

$0=-1-f(1)e+2\Leftrightarrow f(1)=e^{-1}$

Svar $f(1)=e^{-1}$