KTH Matematik
Karim och Olle

Tentamen i SF1625 Envariabelanalys för CELTE1, CINTE1, CMAST1, CMIEL1, CMED1 och CSAMH1, 09–06–01, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta din kursledare i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Beräkna
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x}\right). \qquad (3p)$$

Lösning: För positiva x är

$$\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+2x}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+2x}}$$
$$= \frac{x^2+4x-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+4/x}+\sqrt{1+2/x})}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+4/x}+\sqrt{1+2/x}} \to \frac{2}{1+1} = 1 \quad \text{då } x\to\infty.$$

2. Bestäm ett värde på konstanten a så att kurvorna $y = ax^2$ och $y = \ln x$ har samma tangent i någon gemensam punkt. (3p)

Lösning: I den gemensamma punkten är

$$\begin{cases} ax^2 = \ln x, \\ 2ax = 1/x, \end{cases}$$

där $x > 0$, eftersom ln bara är definierad för positiva x. Andra ekvationen visar att

$$x^2 = \frac{1}{2a}, \quad \text{så att} \quad x = (2a)^{-1/2};$$

insatt i den första fås sedan

$$a \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{1}{2}\ln(2a) \iff \ln(2a) = -1 \iff 2a = e^{-1}$$
$$\iff a = \frac{1}{2e} \quad (\Longrightarrow x = \sqrt{e}).$$

3. Beräkna längden av kurvan

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le 1. \qquad (3p)$$

Lösning: Båglängdselementet ds uppfyller $ds^2 = 1 + (y')^2$. Här fås

$$y' = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow$$
$$ds^2/dx^2 = 1 + (y')^2 = 1 + \frac{(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} = 1 + \frac{1-x}{1+x}$$
$$= \frac{1+x+1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}.$$

Därmed blir båglängden lika med

$$s = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \sqrt{2} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

4. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \sqrt{3+t^2}\,dt}{\sin(\pi x)}. \qquad (3p)$$

Lösning: l'Hospitals regel $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \sqrt{3+t^2}}{\sin(\pi x)} = \frac{''0''}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x^2}}{\pi\cos(\pi x)} = \frac{\sqrt{4}}{\pi\cdot(-1)} = -\frac{2}{\pi}.$$

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = 2\sin x + 5e^{5x}. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$, där y_{hom} fås med hjälp av karakteristiska ekvationen:

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Longrightarrow \text{ dubbelroten } r = 1$$
$$\Longrightarrow y_{\text{hom}} = (Ax+B)e^x.$$

y_{part} kan skrivas som $y_{\text{part}} = y_1 + y_2$, där y_1, y_2 satisfierar $y'' - 2y' + y = 2\sin x$ respektive $y'' - 2y' + y = 5e^{5x}$.

Ansatsen $y_1 = a\cos x + b\sin x$ ger

$$(-a\cos x - b\sin x) - 2(-a\sin x + b\cos x) + a\cos x + b\sin x = 2\sin x$$
$$\Longrightarrow (-2b)\cos x + 2(a-1)\sin x = 0 \iff a = 1, b = 0 \Longrightarrow y_1 = \cos x.$$

Ansatsen $y = ae^{5x}$ ger

$$a\cdot e^{5x}\cdot(25 - 10 + 1) = 5\cdot e^{5x} \Longrightarrow a = \frac{5}{16} \Longrightarrow y_2 = \frac{5}{16}\,e^{5x}.$$

Tillsammans fås

$$y = (Ax+B)e^x + \cos x + \frac{5}{16}\,e^{5x}.$$

6. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x) = \arcsin 3x + 2\sqrt{1-9x^2}$ på intervallet $-1/3 \le x \le 1/3$. (4p)

Lösning: $f(-1/3) = \arcsin(-1) + 0 = -\pi/2$ och $f(1/3) = \arcsin 1 + 0 = \pi/2$; då $-1/3 < x < 1/3$ blir

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-18x}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}(1-6x),$$

$$\text{som är } \begin{cases} > 0 \text{ då } -1/3 < x < 1/6, \\ = 0 \text{ då } x = 1/6, \\ < 0 \text{ då } 1/6 < x < 1/3. \end{cases}$$

Härur ser man att

$$f_{\max} = f(1/6) = \arcsin 1/2 + 2\sqrt{1 - 9/36} = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \sqrt{3/4} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}.$$

Så största värdet är $= \pi/6 + \sqrt{3}$, och det minsta är $= -\pi/2$.

7. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(1, 2)$ och som tillsammans med de *positiva* koordinataxlarna bildar en triangel med så liten area som möjligt. (4p)

   Lösning: Den räta linjens ekvation är

   $$y - 2 = k \cdot (x - 1),$$

   där lutningen k måste vara negativ för att linjen ska kunna skära de *positiva* koordinataxlarna. Linjens skärningspunkter med de senare är: $x = 0 \Longrightarrow y = 2 - k; y = 0 \Longrightarrow x = 1 - 2/k$. Därmed blir dubbla arean lika med

   $$f(k) = (2 - k) \cdot (1 - 2/k) = 4 - k - \frac{4}{k},$$

   som $\to \infty$ då $k \to -\infty$ respektive $k \to 0-$. Då $k < 0$ fås

   $$f'(k) = -1 + \frac{4}{k^2}, \text{ som är 0 då } k = -2, \text{ och}$$
   $$f''(k) = \frac{-8}{k^3} \Longrightarrow f''(-2) = 1 > 0,$$

   så att $f(k)$ har ett minimum då $k = -2$. Alltså fås linjen

   $$y - 2 = (-2) \cdot (x - 1) \iff y = 4 - 2x.$$

8. Bestäm den positiva konstanten a så att

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{a + x} - x}{x^2}$$

   existerar ändligt, samt beräkna motsvarande gränsvärde. (4p)

   Lösning: Villkoret för att gränsvärdet ska finnas är att täljaren kan skrivas som $x^2 \cdot B(x)$, där funktionen $B(x)$ är begränsad nära $x = 0$. Och gränsvärdet blir då $B(0)$.

Vi använder oss av binomialformeln

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots ,$$

som visar att täljaren är lika med

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}\left(\left(1+\frac{2x}{a}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/2}\right) - x \\
=&\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{a} + \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2}\cdot\frac{4x^2}{a^2} + \mathcal{O}(x^3)\right. \\
&\qquad \left. -1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \mathcal{O}(x^3)\right) - x \\
=&\sqrt{a}\left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{8}(4-1)\cdot\frac{x^2}{a^2} + \mathcal{O}(x^3)\right) - x \\
=&x\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1\right) - \frac{3}{8a\sqrt{a}}\cdot x^2 + \mathcal{O}(x^3).
\end{aligned}$$

Kravet att x-termen ska försvinna visar att $2\sqrt{a} = 1 \iff a = 1/4$. Då är $a\sqrt{a} = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$, varvid täljaren blir $= -3x^3 + \mathcal{O}(x^3)$, och det sökta gränsvärdet blir lika med

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = -3.$$