KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Kortfattat lösningsförslag till Tentamen i SF1625 Envariabelanalys den 10 maj

1. **Antar funktionen $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{3x}$ värdet -8?**

Lösning: Vi observerar först att funktionen är kontinuerlig för alla $x \geq 0$, att $f(0) = 0$ och att $f(x) \to \infty$ när $x \to \infty$. Vi deriverar och får efter förenkling

$$f'(x) = \frac{15x^2 - 15}{2\sqrt{3x}}$$

som existerar för alla $x > 0$. Eftersom $f'(x) < 0$ då $0 < x < 1$, $f'(1) = 0$ och $f'(x) > 0$ då $x > 1$ ser vi att funktionen antar sitt minsta värde då $x = 1$. Eftersom detta minsta värde är $f(1) = -4\sqrt{3} > -8$ så kan funktionen inte anta värdet -8.

Svar: Nej.

2. **Låt f vara en kontinuerlig funktion som uppfyller $\int_1^4 f(x)\,dx = -1$ och $\int_4^9 f(x)\,dx = 5$. Beräkna:**

A. $\int_1^9 -2f(x)\,dx$.

B. $\int_2^3 xf(x^2)\,dx$ **(tips: använd substitutionen $u = x^2$).**

C. $\int_2^3 xe^{x^2}\,dx$.

Svar och lösning: A. $\int_1^9 -2f(x)\,dx = -2\int_1^9 f(x)\,dx = -8.$

B. $\int_2^3 xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_4^9 f(u)\,du = \frac{5}{2}$

C. $\int_2^3 xe^{x^2}\,dx = (1/2)[e^{x^2}]_2^3 = \frac{e^9 - e^4}{2}$

3. **När luft expanderar adiabatiskt (utan värmeutbyte med omgivningen) uppfyller trycket p och volymen V sambandet $p \cdot V^{1,4}$ =konstant. Vid en viss tidpunkt är trycket 5 atm och volymen 56 liter. Vid samma tidpunkt ökar volymen med hastigheten 4 liter per sekund. Hur snabbt ändras trycket vid denna tidpunkt ? (Ur: Persson och Böiers: Analys i en variabel)**

Lösning: Vi deriverar sambandet $p(t)(V(t))^{1.4} = C$ och får att

$$p'(t)(V(t))^{1.4} + p(t) \cdot 1.4(V(t))^{0.4} \cdot V'(t) = 0.$$

Om vi i denna formel sätter in att $p(t) = 5$ och $V(t) = 56$ och $V'(t) = 4$ och löser ut $p'(t)$ får vi att $p'(t) = -1/2$. Trycket minskar alltså med $-1/2$ atm per sekund i detta ögonblick.

Svar: Trycket minskar med $-1/2$ atm per sekund i detta ögonblick.

4. **Beräkna ett närmevärde till integralen $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$, genom att använda Taylors formel på lämpligt sätt, så att felet blir högst 10^{-3}. För full poäng krävs ordentlig motivering för storleken på felet.**

Lösning: Vi Taylorutvecklar $\sin(x^2)$. Eftersom $\sin t = t - t^3/3! + \cos(\xi)t^5/5!$ så är $\sin(x^2) = x^2 - x^6/3! + \cos(\xi)x^{10}/5!$ för något tal ξ. Vi får att ett närmevärde till integralen i uppgiften är därför

$$\int_0^1 (x^2 - x^6/3!)\,dx = \frac{13}{42}.$$

Eftersom $|\cos\xi| \leq 1$ så är felet i approximationen är till absolutbeloppet högst

$$\int_0^1 \frac{x^{10}}{5!} = \frac{1}{11 \cdot 5!} < \frac{1}{10 \cdot 100} = 10^{-3}$$

vilket betyder att noggrannheten är den önskade.

Svar: Närmevärde $13/42$, absolutbeloppet av felet är mindre än 10^{-3}.

5. **Vid en keramisk tillverkningsprocess tas produkten ut ur ugnen vid $800°$C och ställs att svalna i rumstemperatur $20°$C. Professor P. vid Smockholts universitet föreslår följande matematiska modell för förloppet: produktens temperatur $y(t)$ vid tiden t minuter efter uttagandet ur ugnen uppfyller att**

$$y'(t) = \frac{1}{10}(y(t) - 20), \qquad y(0) = 800.$$

A. Lös initialvärdesproblemet ovan. B. Diskutera modellens rimlighet.

Löning: A. Differentialekvationen kan skrivas $y' - (1/10)y = -2$ och är linjär med konstanta koefficienter. Lösningen har formen $y = y_h + y_p$ där y_h är allmän lösning till motsvarande homogena ekvation $(y' - (1/10)y = 0)$ och y_p är någon partikulärlösning. Vi ser direkt att vi kan ta $y_p = 20$. För y_h: Karaktäristiska ekvationen $r - 1/10 = 0$ har lösning $r = 1/10$ så $y_h = Ce^{t/10}$. Den givna differentialekvationens lösning är alltså $y(t) = Ce^{t/10} + 20$. Med hjälp av initialvillkoret bestämmer vi konstanten $C = 780$. Svar på A alltså: $y(t) = 780e^{t/10} + 20$.

B. Eftersom lösningen $y(t)$ i A växer obegränsat med t så förutsäger modellen att temperaturen hos produkten ökar efter att den har tagits ut ur den varma ugnen och placerats i rumstemperatur. Detta är helt orimligt och kan inte stämma. Modellen är alltså värdelös. En rimligare modell skulle kunna vara

$$y'(t) = -\frac{1}{10}(y(t) - 20), \qquad y(0) = 800.$$

där det lilla minustecknet gör att temperaturen minskar istället för att öka. Denna modell är precis Newtons avkylningslag: avsvalningstakten är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten och det omgivande rummet.

6. **En 1 meter lång tråd är spänd mellan punkterna 0 och 1 på x-axeln. Trådens densitet ρ varierar enligt formeln $\rho(x) = 1 + x$ kg/m. Beräkna trådens massa.**

Lösning: Vi delar in tråden i små bitar och räknar på varje bit. En liten bit av tråden vid punkten x med längd dx har massa $(1 + x)\,dx$ kg. Hela massan fås genom summation och blir därför

$$\int_0^1 (1 + x)\,dx = \frac{3}{2} \text{ kg}.$$

SVar: 3/2 kg

7. **Funktionen** $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ **är inte definierad överallt. Kan man "förbättra" denna funktion så att den blir definierad och kontinuerlig överallt? Hur gör man det i så fall?**

Lösning: Funktionen är elementär och därför kontinuerlig överallt där den är definierad, dvs överallt utom i origo. Eftersom $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (standardgränsvärde) så kan man "förbättra" f genom att tilldela f värdet 1 i origo. (Formellt definierar man då en ny funktion, som vi t ex kan kalla f_0, genom att låta $f_0(x) = f(x)$ då $x \neq 0$ och $f_0(0) = 1$. Denna funktion f_0 är då kontinuerlig överallt och överensstämmer med den ursprungliga funktionen f i alla punkter utanför origo.)

8. **Låt** $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$**. Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter till** f **samt skissera kurvan** $y = f(x)$**.**

Lösning. Vi observerar först att definitionsmängden för f är hela $\mathbb{R}$, inga lodräta asymptoter alltså. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 - \pi/2$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 + \pi/2$ så ser vi att linjen $y = 2 - \pi/2$ är asymptot i oändligheten och linjen $y = -2 + \pi/2$ är asymptot i minus oändligheten. Vi deriverar nu och får efter förenkling att

$$f'(x) = \frac{2 - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$

vilket har nollställena $\pm\sqrt{3}$. Teckenstudium av derivatan ger vid handen att funktionen har ett lokalt max i $\sqrt{3}$ och ett lokalt min i $-\sqrt{3}$ och sedan är det bara att skissa kurvan.

9. **Givet att** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi x^2}\,dx = 1/2$**, beräkna de fyra integralerna**

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx,$$

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\,dx \text{ och}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx.$$

Svar: $J = 1$ (integranden är jämn),$I_0 = \sqrt{\pi/2}$ (gör variabelbytet $u = x\sqrt{2\pi}$), $I_1 = 1$ (räknas ut direkt, en primitiv funktion är $^{-}e^{-x^2/2}$), $I_2 = \sqrt{\pi/2}$ (räknas ut med partiell integration och med användande av I_0).

10. **Vid ett test med ett nytt energisnålt fordon ska en sträcka om** 100 **km köras. Hastigheten** v **ska under testet variera med körsträckan** s **enligt formeln** $v(s) = \sqrt{100 + 3s}$**, där alltså** $0 \leq s \leq 100$**. Hur lång tid tar testet?**

Lösning. En liten bit av sträckan med längd ds, efter s km, tar (eftersom $t = s/v$) tiden $\dfrac{ds}{v} = \dfrac{ds}{\sqrt{100 + 3s}}$ timmar att köra. Hela tiden fås genom summation av sådana bitar och blir därför

$$\int_0^{100} \frac{ds}{\sqrt{100 + 3s}} = \frac{20}{3} \text{ timmar.}$$

Svar: 20/3 timmar.