KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Tentamen i SF1625 Envariabelanalys

den 18 mars kl 14.00-19.00

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Antar funktionen $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{3x}$ värdet -8?

2. Låt f vara en kontinuerlig funktion som uppfyller $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = -1$ och $\displaystyle\int_4^9 f(x)\,dx = 5$. Beräkna:

   A. $\displaystyle\int_1^9 -2f(x)\,dx.$

   B. $\displaystyle\int_2^3 xf(x^2)\,dx$ (tips: använd substitutionen $u = x^2$).

   C. $\displaystyle\int_2^3 xe^{x^2}\,dx.$

3. När luft expanderar adiabatiskt (utan värmeutbyte med omgivningen) uppfyller trycket p och volymen V sambandet $p \cdot V^{1,4}$ =konstant. Vid en viss tidpunkt är trycket 5 atm och volymen 56 liter. Vid samma tidpunkt ökar volymen med hastigheten 4 liter per sekund. Hur snabbt ändras trycket vid denna tidpunkt ? (Ur: Persson och Böiers: Analys i en variabel)

4. Beräkna ett närmevärde till integralen $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$, genom att använda Taylors formel på lämpligt sätt, så att felet blir högst 10^{-3}. För full poäng krävs ordentlig motivering för storleken på felet.

5. Vid en keramisk tillverkningsprocess tas produkten ut ur ugnen vid 800°C och ställs att svalna i rumstemperatur 20°C. Professor P. vid Smockholts universitet föreslår följande matematiska modell för förloppet: produktens temperatur $y(t)$ vid tiden t minuter efter uttagandet ur ugnen uppfyller att

$$y'(t) = \frac{1}{10}(y(t) - 20), \qquad y(0) = 800.$$

A. Lös initialvärdesproblemet ovan. B. Diskutera modellens rimlighet.

6. En 1 meter lång tråd är spänd mellan punkterna 0 och 1 på x-axeln. Trådens densitet ρ varierar enligt formeln $\rho(x) = 1+x$ kg/m. Beräkna trådens massa.

7. Funktionen $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ är inte definierad överallt. Kan man "förbättra" denna funktion så att den blir definierad och kontinuerlig överallt? Hur gör man det i så fall?

8. Låt $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$. Bestäm alla asymptoter och lokala extrempunkter till f samt skissera kurvan $y = f(x)$.

9. Givet att $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi x^2}\,dx = 1/2$, beräkna de fyra integralerna

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx,$$

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\,dx \text{ och}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx.$$

10. Vid ett test med ett nytt energisnålt fordon ska en sträcka om 100 km köras. Hastigheten v ska under testet variera med körsträckan s enligt formeln $v(s) = \sqrt{100+3s}$, där alltså $0 \le s \le 100$. Hur lång tid tar testet?