Lösningsförslag till tentamen i SF1625 Envariabelanalys

den 2 juni 2010

1. Vi ser att f är kontinuerlig på hela det slutna begränsade intervallet och därför är det redan från början klart att f antar ett största och ett minsta värde samt alla värden däremellan. Vi deriverar och får $f'(x) = (3x^2 - 9)e^{x^3-9x}$ som existerar för alla x i intervallet. Det största och minsta värdet måste därför antas i en kritisk punkt eller i intervallets ändpunkter. Eftersom för x i intervallet gäller att $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 9 = 0 \iff x = \sqrt{3}$ så ser vi att det finns exakt en kritisk punkt. Eftersom vidare $f(0) = 1, \quad f(\sqrt{3}) = e^{-6\sqrt{3}}, \quad f(2) = e^{-10}$ ser vi att det största värdet är 1 och det minsta är $= e^{-6\sqrt{3}}$. Värdemängden är alltså $[e^{-6\sqrt{3}}, 1]$

SVar: $[e^{-6\sqrt{3}}, 1]$

2. Med hjälp av partiell integration får vi

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

och

$$I_2 = \int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = [-x^2e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-2xe^{-x})\,dx = -e^{-1} + 2I_1 = 2 - \frac{5}{e}.$$

3. Vi ser att f är kontinuerlig för alla positiva t och

$$f'(t) = \frac{10}{(t+10)^2} - \frac{200}{(t+10)^3} = \frac{10t - 100}{(t+10)^3}$$

vilket också existerar för alla positiva t. Vi ser att $f'(t) < 0$ för $0 < t < 10$ och $f'(t) > 0$ för alla $t > 10$ medan $f'(10) = 0$. Det följer att f är strängt avtagande på intervallet $0 < t < 10$ och strängt växande på intervallet $t > 10$ och att f har en lokal minpunkt i $t = 10$. Vi kan alltså dra slutsatsen att syremängden är som minst då $t = 10$ dvs 10 dygn efter utsläppet. Eftersom $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ så närmar sig syremängden 1 när lång tid har gått. För att undersöka när syremängden ökar som snabbast ska vi hitta derivatans, f':s, största värde. För att göra det deriverar vi f' och får

$$f''(t) = \frac{10(t+10)^3 - 3(t+10)^2(10t-100)}{(t+10)^6} = \frac{(t+10)^2(400-20t)}{(t+10)^6}.$$

Efter ett teckenstudium av andraderivatan (som är positiv då $0 < t < 20$, 0 då $t = 20$ och negativ då $t > 20$) ser vi att $f'(t)$ tar sitt största värde då $t = 20$, dvs syremängden ökar snabbast exakt 20 dygn efter utsläppet.

Eftersom $lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ så gäller att syremängden är ungefär 1 efter lång tid. Eftersom $f(0) = 1$ också, så betyder det att syremängden efter lång tid är densamma som före utsläppet.

Återstår att skissa kurvan.

4. Med hjälp av Taylors formel får vi att $\sin x = x - x^3/6 + R(x)$ där feltermen $R(x) = (\cos\xi/5!)x^5$ för något tal ξ mellan 0 och x. Detta ger att

$$\sin\frac{3}{10} \approx \frac{3}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = 0,2955,$$

dvs $0,2955$ är ett närmevärde till $\sin(3/10)$ som vi avrundar till $0,296$. Felet kan uppskattas:

$$|R(3/10)| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{1}{4}\frac{81}{10^6} < 0,000025$$

så vi ser att vårt närmevärde har tre korrekta decimaler.

5. Differentialekvationen kan skrivas

$$i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}.$$

Först söks homogena lösningen i_h dvs allmänna lösningen till $i'(t) + (R/L)i(t) = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r + R/L = 0$ har lösning $r = -R/L$ varför $i_h(t) = Ce^{-Rt/L}$, där C är en godtycklig konstant. En partikulärlösning man ser direkt är $i_p = E/R$. Allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är alltså $i(t) = Ce^{-Rt/L} + E/R$. Om initialvillkoret $i(0) = 0$ ska vara uppfyllt måste nu $Ce^0 + E/R = 0$, dvs $C = -E/R$. STrömmen ges alltså av funktionen

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-Rt/L} + .$$

6. a. Se läroboken

6. b. Volymen fås som $V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{2}.$

7. Vi ska först studera $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, som är definierad för alla x. För att hitta dess kritiska punkter deriverar vi och får $f''(x) = (x^2-1)e^{-x^2/2}$ som är positivt då $x < -1$, noll då $x = -1$, negativt då $-1 < x < 1$, noll då $x = 1$ och positivt då $x > 1$. Eftersom dessutom $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ så följer av det ovanstående att största värdet för f' inträffar då $x = -1$ och minsta värdet för f' inträffar då $x = 1$. Dessa x-värden är alltså de där grafen $y = f(x)$ lutar maximalt, och lutningen i dessa

punkter är $\pm e^{-1/2} = \pm 1/\sqrt{e}$. Eftersom derivatan är kontinuerlig tar den sedan också alla värden mellan dessa tal. De värden derivatan kan anta är alltså alla reella tal z sådana att $-1/\sqrt{e} \le z \le 1/\sqrt{e}$. För att skissa grafen $y = f(x)$ behöver vi nu också hitta alla lokala extrempunkter. För detta ändamål kollar vi derivatans nollställen. Vi har $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$, ett teckenstudium av derivatan ger att detta är en lokal maxpunkt. Värdet i denna punkt är 1. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ är det nu bara att skissa grafen $y = f(x)$.

8. Med hjälp av partialbråksuppdelning får vi att

$$\frac{1}{ab + ax + bx + x^2} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right)$$

och med hjälp av detta får vi för positiva a och b att

$$I = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{b-a} \int_0^R \left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{b-a} [\ln(a+x) - \ln(b+x)]_0^R = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a}.$$

OM $a = b = 0$ får vi integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

dvs integralen är divergent i detta fall.

9. Funktionen $f(x) = |x - 2|$ är kontinuerlig men ej deriverbar i $x = 2$, så påstående 1 är alltså falskt. På sid 185 i kursboken står beviset för att påstående 2 är sant.

Funktionen $A(r)$ i uppgiften ges av $A(r) = r^2\theta/2$ (arean av en cirkelsektor med radie r och vinkel θ). Det sökta gränsvärdet är precis $A'(R) = R\theta$.

10. Vi ser att g är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 2]$ så existensen av ett största och ett minsta värde är garanterad. Eftersom g är deriverbar med derivata $g'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}$ så måste max och min antas i en kritisk punkt eller i en ändpunkt. Eftersom $g'(x) = 0$ om och endast om $x = 1$ så ser vi att detta är den enda kritiska punkten. Max/min måste alltså antas i någon av punkterna 0, 1 och 2. Vi räknar ut funktionsvärdena i dessa punkter och jämför.

Vi ser direkt att $g(0) = 0$.

För de andra punkterna får vi med hjälp av partialbråksuppdelning att

$$g(1) = \int_0^1 \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

och

$$g(2) = \int_0^2 \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt = \int_0^2 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 = \ln\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Vi jämför och finner att största värdet är $\ln\sqrt{2}$ och minsta värdet är 0.