KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Tentamen i SF1625 Envariabelanalys
den 2 juni 2010 kl 08.00-13.00

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen (under innevarande läsår) på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = e^{x^3-9x}$ när x tillhör intervallet $[0, 2]$.
2. Låt, för alla positiva heltal n, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$. Beräkna I_1 och I_2.
3. I en viss matematisk modell antas att mängden syre i en sjö t dygn efter ett avloppsutsläpp ges av funktionen
$$f(t) = 1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}.$$
När är syremängden som minst? Vid vilken tidpunkt ökar syremängden snabbast? Vad händer efter mycket lång tid? Skissera f:s graf!
4. Bestäm, med hjälp av ett lämpligt valt Taylorpolynom, ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\sin\frac{3}{10}$. För full poäng krävs uppskattning av felets storlek.
5. Vi betraktar en elektrisk krets som består av en spänningskälla E, en resistans R och en induktans L. Strömmen genom kretsen är en funktion av tiden, t. Om vi betecknar strömmen med i så gäller att $E = Ri + L\frac{di}{dt}$. Om dessutom $i(0) = 0$ – beräkna $i(t)$.
6. A. Förklara varför volymen av den kropp som uppstår då kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, får rotera runt x-axeln ges av formeln $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$.
(f antas icke-negativ och kontinuerlig på $[a, b]$)
B. Använd formeln ovan för att beräkna volymen som uppstår då $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ får rotera ett varv runt x-axeln.

V. g. v.

7. Låt $f(x) = e^{-x^2/2}$. Bestäm de värden f' kan anta, och ange speciellt de x-värden för vilka grafen $y = f(x)$ lutar så mycket som möjligt. Skissa också grafen $y = f(x)$.

8. Låt a och b vara positiva tal. Beräkna integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{ab + ax + bx + x^2}.$$

Vad händer (vad blir I) om $a = b = 0$?

9. A. Nedan följer två påståenden. Ge till varje påstående antingen ett bevis, som visar att det är sant, eller ett motexempel, som visar att det är falskt.
Påstående 1: Om f är kontinuerlig i $x = 2$ så är f deriverbar i $x = 2$.
Påstående 2: Om f är deriverbar i $x = 2$ så är f kontinuerlig i $x = 2$.
B. En cirkelsektor med medelpunktsvinkel θ har radien R och arean $A(R)$. Med bibehållen vinkel ändras radien till r och därmed arean till $A(r)$. Beräkna $\lim\limits_{r \to R} \dfrac{A(r) - A(R)}{r - R}$.

10. Bestäm det största och minsta värde som antas av funktionen $g(x)$, där

$$g(x) = \int_0^x \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt, \quad 0 \le x \le 2.$$