KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till Tentamen
2010-05-31

1. **Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ antar något största respektive minsta värde. Bestäm i så fall dessa.**

Funktionen är definierad för alla x och $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde). Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

som existerar för alla x och är lika med 0 om och endast om $x = \pm 1$. Vi teckenstuderar derivatan och ser att

om $x < -1$ så är $f'(x) < 0$ och f alltså strängt avtagande,

om $-1 < x < 1$ så är $f'(x) > 0$ och f alltså strängt växande,

om $x > 1$ så är $f'(x) < 0$ och f alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att f antar sitt minsta värde i $x = -1$ och sitt största värde i $x = 1$. Funktionens minsta värde är alltså $f(-1) = -e^{-1/2} = -1/\sqrt{e}$ och funktionens största värde är $f(1) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$.

Svar: Största värdet är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minsta värdet är $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.

2. **Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$.**
   A. Använd substitutionen $u = \ln x$ för att skriva om integralen.
   B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.

A. Med $u = \ln x$ som är injektiv blir $du = dx/x$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$ och $x = e \Leftrightarrow u = 1$ och vi får

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int_0^1 u^4\,du.$$

B. Vi beräknar integralen i A och får

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}.$$

Svar: A. $\int_0^1 u^4\,du$. B. $1/5$

3. **Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$. Om du väljer att räkna ut en integral, förklara varför den integralen ger längden av kurvan!**

För förklaringen, se boken sid 334-336. Med $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ är $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ och längden av kurvan ges av

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}).$$

Svar: $\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}$

4. **Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ och linjen $y = x - 2$.**

Skärningspunkterna mellan kurvorna fås då $\pm\sqrt{x} = x - 2$. Vi kvadrerar och får andragradsekvationen $x = x^2 - 4x + 4$ som är ekvivalent med $x^2 - 5x + 4 = 0$ med lösningar $x = 1$ och $x = 4$. Vi ser att linjen med ekvation $y = x - 2$ skär parabeln $y = -\sqrt{x}$ i punkten $(1, -1)$ och linjen skär parabeln $y = \sqrt{x}$ i punkten $(4, 2)$. Den sökta arean blir därför

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2))\,dx = ... = \frac{9}{2}.$$

Svar: $9/2$

5. **A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$.**
B. Beräkna med hjälp av svaret på uppgift A ett närmevärde till $\ln 1.1$.
C. Avgör om ditt närmevärde har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.001.

A.Vi deriverar och får $f'(x) = 1/(1+x)$ och $f''(x) = -1/(1+x)^2$ och $f'''(x) = 2/(1+x)^3$ som alla är kontinuerliga för $x > -1$. I origo får vi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och $f''(0) = -1$ så det sökta Maclaurinpolynomet är alltså

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

B. Eftersom Maclaurinpolynomet approximerar funktionen för x nära noll får vi att

$$\ln(1.1) = f(0.1) \approx p(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^2}{2} = 0.095.$$

Ett närmevärde till $\ln(1.1)$ är alltså 0.095.

C. Enligt Taylors formel får vi att felet $f(0.1) - p(0.1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}0.1^3$ för något tal ξ mellan 0 och 0.1. I det aktulla intervallet är $|f'''(\xi)| \leq 2$ och alltså är absolutbeloppet av felet högst $\frac{2}{3!}0.1^3 = \frac{1}{3} \cdot 0.001$ som är mindre än 0.001.

Svar: A. $p(x) = x - \frac{x^2}{2}$. B. 0.095. C. Ja.

6. **Utslagsvinkeln α i en plan pendel uppfyller differentialekvationen**

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0,$$

där α mäts i radianer, g är tyngdaccelerationen och L är längden av tråden. För små utslag brukar man göra approximationen $\sin\alpha \approx \alpha$. Då får man den linjära ekvationen

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0.$$

Lös denna linjära differentialekvation och bestäm pendelns läge efter en sekund, om $L = 0.2$ meter och om pendeln i startögonblicket har utslagsvinkeln 3° (dvs $\pi/60$ radianer) och hastigheten 0 m/s. Räkna med att tyngdaccelerationen g är 9.8 m/s^2. *(Ur Persson och Böiers: Övningar i analys i en variabel)*

Ersätter vi g med 9.8 och L med 0.2 får vi diffekvationen $\alpha''(t) + 49\alpha(t) = 0$. Den har karaktäristisk ekvation $r^2 + 49 = 0$ med lösningar $r = \pm 7i$ så diffekvationen har alltså allmän lösning

$$\alpha(t) = A\cos 7t + B\sin 7t,$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Med hjälp av initialvillkoren kan vi nu bestämma konstanterna. Att hastigheten är noll i startögonblicket betyder att $\alpha'(0) =$

0 vilket ger att $B = 0$. Den andra villkoret, $\alpha(0) = \pi/60$, ger att $A = \pi/60$. Vårt initialvärdesproblem har alltså lösningen

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{60}\cos 7t.$$

Vi ser att pendelns läge efter en sekund approximativt är

$$\alpha(1) = \frac{\pi}{60}\cos 7 \text{ radianer.}$$

Svar: $\frac{\pi}{60}\cos 7$ radianer.

7. **A. Är det sant att** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$ **för alla heltal** $n \geq 1$**?**

B. Är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ **konvergent?**

A. Med $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ så är f definierad och kontinuerlig på $x \geq 0$. Vidare är $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$ som är definierat och negativt för $x > 0$. Det följer att f är strängt avtagande på intervallet $x \geq 0$. Summan i uppgiften kan skrivas $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ och för varje k gäller, eftersom f är strängt avtagande, att $f(k) < \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$. Det följer att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$ för alla heltal $n \geq 1$.

B. Vår funktion f ovan är kontinuerlig, positiv och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Enligt Cauchys integralkriterium är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ konvergent om och endast om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent. Vi beräknar integralen med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{x}$ och partiell integration och får att

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\infty} 2ue^{-u}\,du = \ldots = \frac{4}{e}.$$

Integralen är alltså konvergent och då måste serien också vara konvergent.

Svar: A. Ja. B. Ja.

8. **A. Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, för $x \neq 0$, och $f(0) = c$. Hur ska konstanten c väljas för att f ska bli kontinuerlig i $x = 0$?**
B. Om c väljs som i uppgift A, finn $f'(0)$ och $f''(0)$.

A. Funktionen f är kontinuerlig i origo om och endast om $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Eftersom $f(0) = c$ och $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (standardgränsvärde) så ska vi välja $c = 1$ för att f ska bli kontinuerlig i origo.

B. Vi beräknar först $f'(0)$. Vi får

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h - h^3/6 + O(h^5) - h}{h^2} = 0.$$

Alltså är $f'(0) = 0$. För andraderivatan gör vi på liknande sätt:

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \sin h - 0}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{h(1 - h^2/2 + O(h^4)) - (h - h^3/6 + O(h^5)}{h^3} = -\frac{1}{3}.$$

Alltså är $f''(0) = -1/3$.

Svar: A. $c = 1$. B. $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1/3$..

9. **A. Låt C vara en cirkel kring origo i xy-planet med radie R. Låt $P : (x_0, y_0)$ vara en punkt på C. Visa att cirkelns tangent i punkten P har ekvationen $xx_0 + yy_o = R^2$.**
B. Låt E vara ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ och låt $P : (x_0, y_0)$ vara en punkt på E. Visa att ellipsens tangent i punkten P har ekvationen $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_o}{b^2} = 1$.

Vi löser först uppgift B. Implicit derivering m a p x av sambandandet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y(x)^2}{b^2} = 1$$

ger

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0.$$

Om vi här substituerar x_0 för x och löser ut $y'(x_0)$ så får vi (om $y_0 \neq 0$)

$$y'(x_0) = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}.$$

Sätter vi in detta i enpunktsformeln för tangentens ekvation får vi

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0)$$

vilket också kan skrivas

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1.$$

Därmed är uppgift B löst. (Lösningen gäller dock bara de punkter (x_0, y_0) där $y_0 \neq 0$, men om $y_0 = 0$ så är $x_0 = a$ och den lodräta tangenten kan skrivas $x = a$ vilket är det vi skulle visa i detta fall)

A. Om vi i lösning av uppgift B ovan sätter $a = b = R$ så har vi också visat uppgift A.