KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
2010-05-31

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Lars Filipsson
Kursansvariga lärare: Jockum Aniansson, Kristian Bjerklöv, Karim Daho, Tomas Ekholm, Lars Filipsson, Armin Halilovic, Jens Hoppe, Göran Hulth, Axel Hultman, Kirsti Mattila, Serguei Shimorin, Jan-Olov Strömberg.

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På uppgifterna 1-3, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja poängen från den löpande examinationen från 3 till 4 poäng krävs att hela uppgiften löses korrekt. Resultatet från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4-6 utgör del B och uppgifterna 7-9 utgör del C. Del C är främst till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av:

Betyg:	A	B	C	D	E	Fx
Poängsumma:	27	24	21	18	16	15
Poäng del C:	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar förklaras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. *Lycka till!*

DEL A

1. Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ antar något största respektive minsta värde. Bestäm i så fall dessa.

2. Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$.
   A. Använd substitutionen $u = \ln x$ för att skriva om integralen.
   B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.

3. Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$. Om du väljer att räkna ut en integral, förklara varför den integralen ger längden av kurvan!

DEL B

4. Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ och linjen $y = x - 2$.

5. A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$.
   B. Beräkna med hjälp av svaret på uppgift A ett närmevärde till $\ln 1.1$.
   C. Avgör om ditt närmevärde har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.001.

6. Utslagsvinkeln α i en plan pendel uppfyller differentialekvationen
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0,$$
där α mäts i radianer, g är tyngdaccelerationen och L är längden av tråden. För små utslag brukar man göra approximationen $\sin\alpha \approx \alpha$. Då får man den linjära ekvationen
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0.$$
Lös denna linjära differentialekvation och bestäm pendelns läge efter en sekund, om $L = 0.2$ meter och om pendeln i startögonblicket har utslagsvinkeln 3° (dvs $\pi/60$ radianer) och hastigheten 0 m/s. Räkna med att tyngdaccelerationen g är 9.8 m/s^2. *(Ur Persson och Böiers: Övningar i analys i en variabel)*

DEL C

7. A. Är det sant att $\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$ för alla heltal $n \geq 1$?

B. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ konvergent?

8. A. Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, för $x \neq 0$, och $f(0) = c$. Hur ska konstanten c väljas för att f ska bli kontinuerlig i $x = 0$?
B. Om c väljs som i uppgift A, finn $f'(0)$ och $f''(0)$.

9. A. Låt C vara en cirkel kring origo i xy-planet med radie R. Låt $P : (x_0, y_0)$ vara en punkt på C. Visa att cirkelns tangent i punkten P har ekvationen $xx_0 + yy_o = R^2$.

B. Låt E vara ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ och låt $P : (x_0, y_0)$ vara en punkt på E. Visa att ellipsens tangent i punkten P har ekvationen $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_o}{b^2} = 1$.