KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
2011-08-25

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Lars Filipsson
Kursansvariga lärare: Jockum Aniansson, Kristian Bjerklöv, Karim Daho, Tomas Ekholm, Lars Filipsson, Armin Halilovic, Jens Hoppe, Göran Hulth, Axel Hultman, Kirsti Mattila, Serguei Shimorin, Jan-Olov Strömberg.

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På uppgifterna 1-3, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja poängen från den löpande examinationen från 3 till 4 poäng krävs att hela uppgiften löses korrekt. Resultatet från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4-6 utgör del B och uppgifterna 7-9 utgör del C. Del C är främst till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av:

Betyg:	A	B	C	D	E	Fx
Poängsumma:	27	24	21	18	16	15
Poäng del C:	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar förklaras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. *Lycka till!*

———— DEL A ————

1. Bestäm de intervall där $f(x) = x^2 - \ln x$, är växande.

2. Beräkna med hjälp av partialbråksuppdelning integralen
$$\int_2^3 \frac{10x}{x^2 - 10x + 24}\,dx.$$

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$ och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ roteras kring x-axeln. (Om du har svårt att beräkna det exakta svaret kan en bra approximation ge delpoäng.)

———— DEL B ————

4. A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
B. Använd svaret på uppgift A när du approximativt beräknar arean mellan kurvan $y = \ln(1 + x^2)$ och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$.

5. En kropp med massan m rör sig rätlinjigt med hastigheten $v(t)$. Den utsätts för en bromsande kraft $-k \cdot v(t)$, där k är en positiv konstant. Om vi antar att inga andra krafter påverkar kroppen så gäller enligt kraftekvationen att $m\frac{dv}{dt} = -k \cdot v(t)$. Bestäm hastigheten som funktion av tiden, om $k = 1$, $m = 2$ kg och $v(0) = 5$ m/s. Avgör sedan också hur lång sträcka kroppen rör sig efter tidpunkten $t = 0$.

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$ på två olika sätt: A. Med hjälp av partiell integration. B. Med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{1-x}$.

———— DEL C ————

7. Vilken är den största area en rektangel i xy-planet kan ha om dess ena hörn ska vara i origo och det diagonalt motsatta hörnet ska ligga någonstans i området $x > 0$, $y > 0$, $y \leq \dfrac{9}{x+1} - 1$?

8. Avgör om det är sant att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq 3.$

9. Bestäm konstanten a så att funktionen
$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$
blir kontinuerlig i origo. Med a valt på detta sätt, avgör om f är deriverbar i origo.