KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2011-10-18

DEL A

1. Låt $x \geq 0$ och $y \geq 0$ vara två tal vars summa är 6. Ange det minimala värdet som uttrycket $2x^2 + y^2$ kan anta.

Lösningsförslag. Eftersom vi vet att $x + y = 6$ kan vi skriva $y = 6 - x$. Vi ska ha $x \geq 0$ och $y \geq 0$, så talet x kan variera mellan 0 och 6. Problemet är alltså att hitta minimum av funktionen $f(x) = 2x^2 + (6 - x)^2$ på intervallet $[0, 6]$. Genom att kvadratkomplettera ser vi att

$$\begin{aligned} f(x) =& 2x^2 + (6^2 + x^2 - 12x) = 3x^2 - 12x + 36 = 3(x^2 - 4x + 12) \\ =& 3((x-2)^2 + 8). \end{aligned}$$

Det minsta värde som f kan anta (på hela reella axeln) är $3 \cdot 8 = 24$, som antas då $x = 2$. Eftersom $x = 2$ ligger i intervallet $[0, 6]$ följer att f:s minsta värde på detta intervall är 24.

Svar. 24

2. Lös integralen
$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx.$$
(Tips: Använd lämpligt variabelbyte.)

Lösningsförslag. Vi beräknar integralen med hjälp av variabelbyte:
$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx. = \left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x-1} \\ x=t^2+1 \\ dt = dx/(2\sqrt{x-1}) \\ x=2 \Rightarrow t=1 \\ x=5 \Rightarrow t=2 \end{array}\right\} = \int_1^2 \frac{2}{t^2+1}dt = \Big[2\arctan t\Big]_1^2 =$$
$$= 2(\arctan 2 - \arctan 1).$$

Svar. $2(\arctan 2 - \arctan 1)$

3. En stillastående bil startar från ett trafikljus och ökar farten med konstant acceleration upp tills farten är $25\ \mathrm{m/s}$. Därefter fortsätter bilen med den konstanta hastigheten $25\ \mathrm{m/s}$. Efter $23\ \mathrm{s}$ har bilen tillryggalagt sträckan $500\ \mathrm{m}$. Hur lång tid efter starten nådde bilen farten $25\ \mathrm{m/s}$?

Lösningsförslag. Låt $v(t)$ vara bilens fart efter t sek. Accelerationen ges av $v'(t)$. Låt den konstanta accelerationen vara a m/s^2 efter t s och antag att farten är 25 m/s efter T s. För $0 \leq t \leq T$ gäller alltså att $v'(t) = a$ och för dessa t är

$$v(t) = \int_0^t a dt = at.$$

Vi har alltså att

$$v(t) = \begin{cases} at & 0 \leq t \leq T \\ 25 & T \leq t \leq 23. \end{cases}$$

Låt $s(t)$ vara den sträcka som bilen tillryggalagt efter t s. Eftersom $s'(t) = v(t)$ så är

$$500 = s(23) - s(0) = \int_0^{23} v(t)dt = \int_0^T at\,dt + \int_T^{23} 25\,dt =$$

$$= \frac{aT^2}{2} + 25 \cdot 23 - 25T = \Big\{v(T) = aT = 25\Big\} = 575 - \frac{25T}{2}.$$

Från detta följer att $T = \frac{150}{25} = 6$.

Svar. 6s

DEL B

4. Visa att $e^x \geq 1 + \sin x$, för varje $x \geq 0$.

Lösningsförslag. Om vi sätter $f(x) = e^x - 1 - \sin x$ så blir uppgiften att visa att $f(x) \geq 0$ för varje $x \geq 0$. Eftersom $e^x > 1$ och $\cos x \leq 1$ då $x > 0$ så ser vi att $f'(x) = e^x - \cos x > 0$ då $x > 0$. Från att derivatan $f'(x)$ är positiv då $x > 0$ (och $f(x)$ kontinuerlig då $x \geq 0$) följer att funktionen $f(x)$ är strängt växande då $x \geq 0$. Eftersom $f(0) = 0$ så följer det nu att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$.

Svar. (Se lösning.)

5. Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$
   (a) Visa att $y(x) = xe^{-x}$ är en lösning till differentialekvationen. **(1 p)**
   (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen. **(1 p)**
   (c) Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x)$$

i fallet då $y(x)$ löser differentialekvationen och $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi börjar med att derivera funktionen $u(x) = xe^{-x}$ och får

$$u'(x) = (1-x)\,e^{-x} \quad \text{och} \quad u''(x) = (x-2)\,e^{-x}.$$

Om vi nu sätter $y(x) = u(x)$ i differentialekvationens vänsterled så får vi

$$u''(x) + 2u'(x) - u(x) = e^{-x}\big((x-2) + 2(1-x) - x\big) = -2xe^{-x},$$

vilket är differentialekvationens högerled och alltså är $u(x)$ en lösning.

(b) Det karakteristiska polynomet till den homogena ekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$$

är lika med

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda + 1 - \sqrt{2})(\lambda + 1 + \sqrt{2}).$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges därmed av

$$Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}$$

där C och D är godtyckliga konstanter. I föregående uppgift såg vi att $u(x) = xe^{-x}$ var en lösning till $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$ så den allmänna lösningen till denna ekvation får vi genom att lägga till den homogena ekvationens lösningar:

$$xe^{-x} + Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}.$$

(c) Om differentialekvationen ska uppfylla $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$ så får vi från uttrycket för den allmänna lösningen i föregående uppgift att

$$1 = 0 \cdot e^{-0} + Ce^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + De^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} = C + D$$

och (genom att derivera)

$$\begin{aligned}-\sqrt{2} &= (1-0)\,e^{-0} + C(-1+\sqrt{2})e^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + D(-1-\sqrt{2})e^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} = \\ &= 1 - (C+D) + \sqrt{2}(C-D) = \sqrt{2}(C-D).\end{aligned}$$

Alltså är $C + D = 1$ och $C - D = -1$ vilket ger att $C = 0$ och $D = 1$. Så lösningen är i detta fall lika med $xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}$. Om $x \to \infty$ så ser vi att $e^{(-1-\sqrt{2})x} \to 0$ (eftersom $-1-\sqrt{2} < 0$) och $xe^{-x} \to 0$ (standardgränsvärde), och alltså är

$$\lim_{x\to\infty} (xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}) = 0.$$

Därefter har vi att

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x}+e^{(-1-\sqrt{2})x})=\lim_{x\to-\infty}e^{(-1-\sqrt{2})x}(xe^{\sqrt{2}x}+1)=\infty,$$

på grund av att

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{\sqrt{2}x}=\left\{t=-\sqrt{2}x\right\}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{t\to\infty}te^{-t}=\left\{\text{Standardgränsvärde}\right\}=0$$

och $\lim_{x\to-\infty}e^{(-1-\sqrt{2})x}=\infty$.

Svar.

(a) (Se lösning.)

(b) $xe^{-x}+Ce^{(-1+\sqrt{2})x}+De^{(-1-\sqrt{2})x}$, där C och D är godtyckliga konstanter

(c) $\lim_{x\to\infty}y(x)=0$ och $\lim_{x\to-\infty}y(x)=\infty$

6. (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 i punkten $x = 0$ (dvs Maclaurinpolynomet) till funktionen $f(x) = (1+x)^{3/2}$. **(2 p)**

(b) Kalla polynomet som vi fick i (6a) för $P(x)$. Om vi använder detta polynom för att approximera värdet $(1+a)^{3/2}$ för tal a i intervallet $[-1/2, 1/2]$, kan vi då vara säkra på att felet, dvs $\left|P(a) - (1+a)^{3/2}\right|$, alltid blir mindre än $1/5$? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Eftersom $f(x) = (1+x)^{3/2}$ har vi $f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$ och $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{1+x}}$. Maclaurinpolynomet av ordning 1 till f ges av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{3x}{2}.$$

(b) Enligt Maclaurins formel har vi (för varje $-1 < x < 1$)

$$f(x) = P(x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

där talet ξ ligger mellan 0 och x. Låt $a \in [-1/2, 1/2]$. Då har vi enligt formeln ovan att

$$|f(a) - P(a)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}a^2\right| = \left|\frac{3}{8\sqrt{1+\xi}}a^2\right| \leq \frac{3}{8\sqrt{1-1/2}} \cdot \frac{1}{4} = \\ = \frac{3\sqrt{2}}{32} < \frac{6}{32} < \frac{1}{5},$$

eftersom ξ ligger mellan 0 och a, d.v.s. vi vet att $\xi \in [-1/2, 1/2]$. Alltså har vi sett att felet blir mindre än $1/5$.

Svar.

(a) $1 + \frac{3x}{2}$

(b) Ja

DEL C

7. (a) Visa att
$$\int_0^1 e^{x^2} \sin 5x \, dx \leq 10.$$
(2 p)

(b) Visa att det finns ett tal N sådant att
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geq 100.$$
(2 p)

Lösningsförslag.

(a) Eftersom e^t är växande för alla t och x^2 är växande då $0 \leq x$, så följer att e^{x^2} är växande då $0 \leq x$. Alltså är $e^{x^2} \leq e^{1^2} = e$ om $0 \leq x \leq 1$. Därtill vet vi att $\sin t \leq 1$ för alla t. Om vi använder dessa två olikheter så får vi att
$$e^{x^2} \sin(5x) \leq e^{x^2} \leq e$$
om $0 \leq x \leq 1$. En egenskap hos integralen är att den bevarar olikheter och alltså är
$$\int_0^1 e^{x^2} \sin(5x) dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e \, dx = e < 10.$$

(b) Betrakta serien
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n}.$$
Vi vet att om en serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är konvergent så är $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Eftersom
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1+\frac{\log n}{n^2}} = \left\{ \text{Standardgränsvärde: } \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0 \right\} = 1 \neq 0$$
så följer att vår serie är divergent. Eftersom serien också är positiv så följer att $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \infty$. Att $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$, för en talföljd b_k, betyder att b_k blir hur stor som helst bara k är tillräckligt stort. Mer precist formulerat: för varje tal B finns ett tal N sådant att $b_n > B$ för varje $n > N$. Alltså vet vi att det finns ett tal N sådant att
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geq 100.$$

Svar.

(a) (Se lösning.)
(b) (Se lösning.)

8. (a) På vilket sätt är integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/3}} dx$$

generaliserad? **(1 p)**

(b) Avgör om integralen är konvergent eller divergent. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Integranden är funktionen $f(x) = \frac{\cos x}{x^{1/3}}$. Denna funktion är kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$, men $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Integralen är alltså generaliserad eftersom integranden är obegränsad på intervallet $(0, 1]$.

(b) På intervallet $(0, 1]$ är $0 < \cos(x) \leq 1$ och $0 < x^{1/3}$, så vi har

$$0 < \frac{\cos x}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{för alla } x \in (0, 1].$$

Den generaliserade integralen $\int_0^1 x^{-1/3} dx$ är konvergent (eftersom $1/3 < 1$; se sidan 315 i Persson-Böiers). Eftersom vi har ovanstående olikhet så följer det från jämförelsesats (Sats 11 på sidan 316 i Persson-Böiers) att den generaliserade integralen $\int_0^1 \cos(x) x^{-1/3} dx$ är konvergent.

Svar.

(a) Obegränsad integrand.

(b) Integralen är konvergent.

9. Ett tal M sägs vara en **övre begränsning** till en mängd A om $M \geq x$ för varje $x \in A$. Ett tal S sägs vara **supremum** av en mängd A om S är den minsta övre begränsningen till A.

   Antag att
$$A = \left\{ \frac{4n^2}{n^2+1} : n \geq 0 \text{ är ett heltal} \right\}.$$
   Visa att supremum av A är 4.

Lösningsförslag. Eftersom $4n^2 < 4(n^2+1)$ så är $\frac{4n^2}{n^2+1} < 4$ för alla $n \geq 0$, och alltså är 4 en övre begränsning till A. Vi vill nu visa att 4 är den minsta övre begränsningen.

Vi beräknar gränsvärdet,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+\frac{1}{n^2}} = 4.$$
Denna beräkning säger oss att $\frac{4n^2}{n^2+1}$ kommer hur nära 4 som helst bara n är tillräckligt stort. Mer precist formulerat: för varje $\epsilon > 0$ finns ett N sådant att
$$\frac{4n^2}{n^2+1} > 4 - \epsilon$$
om $n > N$. För varje $\epsilon > 0$ kan $4 - \epsilon$ alltså inte vara en övre begränsning till A och vi kan därför dra slutsatsen att 4 är den minsta övre begränsningen till A.

Svar. (Se lösning.)