KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2011-12-15

Del A

1. Radien på en cirkel ökar med den konstanta hastigheten 3 cm/s. Hur snabbt ändras cirkelns area vid den tidpunkten då radien är 10 cm?

Lösningsförslag. Arean vid tiden t s kan beskrivas med funktionen

$$A(t) = \pi r(t)^2 \text{ cm}^2,$$

där $r'(t) = 3$ cm/s. Vi söker areans förändring vid den tidpunkt då radien är 10 cm. Förändringen vid tiden t s ges av

$$A'(t) = 2\pi r(t) r'(t) = 6\pi r(t) \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Alltså är areans förändring, då $r(t) = 10$ cm, 60π cm^2/s.

Svar. 60π cm^2/s

2. Beräkna integralen

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx.$$

Lösningsförslag. Funktionen $x \mapsto \tan x$ är kontinuerlig i intervallet $[-\pi/4, \pi/4]$ och dessutom udda, dvs. $\tan(-x) = -\tan x$. Alltså är

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx = 0.$$

Alternativt kan man använda sig av primitiv funktion, då gäller att

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \Big[-\ln|\cos x| \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

Svar. 0

3. Beräkna längden av kurvan $y = 2 - 2x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$.

Lösningsförslag. Längden ges av

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx$$
$$= \left[\frac{2(1+9x)^{3/2}}{3 \cdot 9}\right]_0^1 = \frac{2 \cdot 10^{3/2}}{27} - \frac{2}{27} = \frac{2(10^{3/2} - 1)}{27}$$

Svar. $\frac{2(10^{3/2}-1)}{27}$

DEL B

4. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 3|x|}{x - 2}.$$

(a) Ange alla lokala maximi- och minimipunkter. **(2 p)**
(b) Bestäm samtliga asymptoter till f. Rita även kurvan $y = f(x)$. **(2 p)**

Lösningsförslag. Allmänt gäller att f är kontinuerlig för $x \neq 2$, odefinierad för $x = 2$ och deriverbar för alla $x \in \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 0, x \neq 2\}$. Den kan även beskrivas enligt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x}{x-2} & , x \geq 0 \\ \frac{x^2-3x}{x-2} & , x < 0 \end{cases}$$

(a) Låt oss ta reda på var f växer och var den avtar. Vi har att

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x-6}{(x-2)^2} & , x > 0 \\ \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2} & , x < 0 \end{cases}$$

Då $x < 0$ gäller att $f'(x) > 0$. Då $x > 0$ gäller att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 2 + \sqrt{10}$. Vi har att $f'(x) > 0$ då $x < 0$ eller då $x > 2 + \sqrt{10}$ och att $f'(x) < 0$ då $0 < x < 2$ eller då $2 < x < 2 + \sqrt{10}$.
Bland de deriverbara punkterna har vi alltså en lokal minimipunkt i $x = 2+\sqrt{10}$. Det återstår att studera $x = 0$ där f ej är deriverbar men kontinuerlig. Eftersom f växer till vänster och avtar till höger om $x = 0$ har vi att $x = 0$ är en lokal maximipunkt.

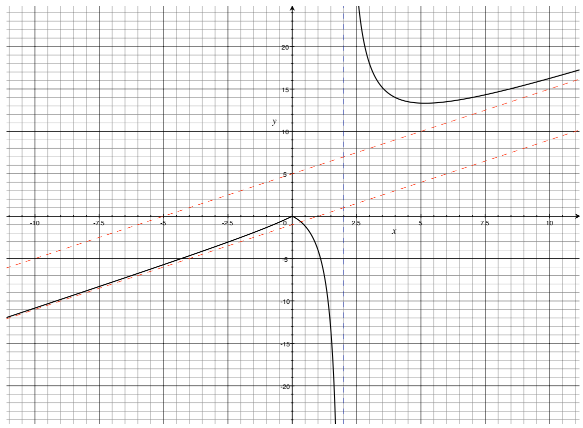
(b) För att söka asymptoter kan vi utföra polynomdivision,

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 + \frac{10}{x-2} & , x \geq 0 \\ x - 1 - \frac{2}{x-2} & , x < 0 \end{cases}$$

Här ser vi att f har asymptoterna $y_1 = x + 5$ och $y_2 = x - 1$ vid $+\infty$ respektive $-\infty$. Vi ser att

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = +\infty,$$

vilket ger att $x = 2$ är en lodrät asymptot.



Svar.

(a) minimipunkt i $x = 2 + \sqrt{10}$ och $x = 0$ är en lokal maximipunkt.

(b) $y_1 = x + 5$ och $y_2 = x - 1$ vid $+\infty$ respektive $-\infty$, samt den lodräta asymptoten $x = 2$.

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen **(2 p)**

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 4x.$$

(b) Verifiera, genom insättning i ekvationen, att svaret du fick i (a) verkligen uppfyller ekvationen. **(1 p)**

(c) Vilka värden på begynnelsevillkoret $y'(0)$ ger en lösning $y(x)$ så att $y(0) = 0$ och **(1 p)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = -2?$$

Lösningsförslag.

(a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + r - 2 = 0$ och har lösningarna $r_1 = -2$ och $r_2 = 1$. Alltså är den homogena lösningen $y(x) = Ce^{-2x} + De^x$.
För att finna en partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = Ax + B$. Derivation och instoppning ger $A - 2(Ax + B) = 4x$, som har lösningarna $A = -2$ och $B = -1$.
Alltså är den allmänna lösningen $y(x) = Ce^{-2x} + De^x - 2x - 1$.

(b) Låt oss verifiera lösningen, $y'(x) = -2Ce^{-2x} + De^x - 2$ och $y''(x) = 4Ce^{-2x} + De^x$. Alltså är

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x) - 2y(x) &= 4Ce^{-2x} + De^x - 2Ce^{-2x} + De^x - 2 \\ &\quad - 2Ce^{-2x} - 2De^x + 4x + 2 = 4x, \end{aligned}$$

vilket skulle verifieras.

(c) Vi har att $y(0) = C + D - 1 = 0$, alltså är $D = 1 - C$. Vi har även att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{Ce^{-2x} + (1-C)e^x - 2x - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-C)e^x}{x} - 2. \end{aligned}$$

För att detta gränsvärde ska vara -2 så måste $C = 1$ och alltså $D = 0$. Således är

$$y'(0) = -2C + D - 2 = -2 + 0 - 2 = -4.$$

Svar.

(a) $y(x) = Ce^{-2x} + De^x - 2x - 1$
(b) se lösningen
(c) $y'(0) = -4$

6. Använd Taylors formel på lämpligt sätt för att bestämma ett närmevärde på integralen
$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$
med ett fel som högst är $1/4$.

Lösningsförslag. Vi använder Taylors formel, $e^x = 1 + x + x^2/2 + e^{\theta x} x^3/6$, där $0 \leq \theta \leq 1$.
Alltså är
$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^1 \frac{e^{\theta x} x^2}{6} dx.$$
Felet är då
$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{\theta x} x^2}{6} dx \leq \frac{e}{6} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{e}{18} \leq \frac{1}{4}$$
och närmevärdet blir
$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Svar. $5/4$

DEL C

7. Låt

$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}.$$

(a) Visa att S är konvergent. **(2 p)**
(b) Visa att $S \leq 1$. **(2 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att notera att termerna i serien är positiva, alltså växer delsummorna.

(a) Om vi visar att $S \leq 1$ följer att S är konvergent. Alternativt kan vi använda att $\ln k \leq \sqrt{k}$ för $k \geq 4$. Olikheten kan visas genom att visa att $g(x) := \sqrt{x} - \ln x$ uppfyller att $g(4) \geq 0$ och $g'(x) \geq 0$ då $x \geq 1$. Därmed är

$$S \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}},$$

vilken är konvergent enligt känd sats.

(b) Bilda funktionen $f : [3, \infty[\to \mathbb{R}$ sådan att

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Då f är deriverbar kan vi visa att f är avtagande genom att studera derivatan. Vi har att

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} < \frac{1 - 2\ln e}{x^3} = -\frac{1}{x^3} < 0$$

och därmed är f avtagande. Vi kan alltså nyttja sambandet mellan integraler och summor, alltså är

$$S \leq \int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{R \to \infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_3^R - \int_3^R -\frac{1}{x^2}\, dx \right) = \frac{\ln 3 + 1}{3} \leq 1$$

eftersom $\ln 3 \leq 2$. Det senare följer av att $\ln 3 < \ln e^2 = 2 \ln e = 2$.

Svar.

(a) Se lösning.
(b) Se lösning.

8. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten x_0. **(1 p)**
   (b) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten x_0. **(1 p)**
   (c) Visa att om f är deriverbar i punkten x_0 så är den även kontinuerlig i punkten x_0. **(2 p)**

Lösningsförslag.
(a) Se boken (sid 149).
(b) Se boken (sid 187).
(c) Se boken (sid 193).

Svar.
(a) Se boken (sid 149).
(b) Se boken (sid 187).
(c) Se boken (sid 193).

9. En 2 meter lång cylindrisk stång med radie 0.1 meter är gjord i ett material med variabel densitet. Densiteten ρ varierar med avståndet till ena änden av stången enligt formeln

$$\rho(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{4} \text{ kg/m}^3,$$

där $x \in [0, 2]$ alltså är avståndet till ena änden av stången. För att beräkna stångens massa kan man tänka så att man delar in stången i mindre bitar och räknar på massan av varje sådan liten bit och till slut summerar. Om vi tänker oss att stången är placerad längs x-axeln med den ena ändpunkten i 0 och den andra i 2 så kan vi dela in stången i n stycken mindre bitar genom välja x-punkter så att

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = 2.$$

Avståndet mellan punkt x_{j-1} och x_j kallar vi Δx_j. Massan av den del av stången som ligger mellan dessa punkter är nu approximativt

$$\rho(x_j) \cdot 0.1^2 \pi \Delta x_j \text{ kg}$$

och hela massan fås genom summation till approximativt

$$\sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \cdot 0.1^2 \pi \Delta x_j \text{ kg}.$$

Om indelningen görs obegränsat fin (dvs om vi låter $n \to \infty$ på ett sådant sätt att alla $\Delta x_j \to 0$) så får vi stångens massa. Beräkna stångens massa.

Lösningsförslag. Om vi använder de beteckningar som är givna i uppgiften har vi att summan som approximativt ger stångens massa är

$$\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{(x_j-1)^2}{4}\right) \cdot 0.1^2 \pi \Delta x_j \text{ kg}.$$

Detta är en Riemannsumma som vid obegränsat förfinad indelning (på det sätt som anges i uppgiften) konvergerar mot integralen

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{(x-1)^2}{4}\right) \cdot 0.1^2 \pi dx$$

eftersom integranden är kontinuerlig på intervallet $[0, 2]$. Stångens massa är alltså

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{(x-1)^2}{4}\right) \cdot 0.1^2 \pi dx = 0.1^2 \pi \cdot \left[x - \frac{(x-1)^3}{12}\right]_0^2 = \frac{11\pi}{600} \text{ kg}.$$

Svar. $11\pi/600$ kg